

***Isotherme
elliptische
Gravitationslinsen***

Diplomarbeit - Robert Kormann

Isotherme
elliptische
Gravitationslinsen

Diplomarbeit

vorgelegt von Robert Kormann

an der

Ludwig-Maximilians-Universität

München,

angefertigt am

Max-Planck-Institut für Astrophysik, Garching.

Betreuer:

Prof. Dr. Jürgen Ehlers

München, Oktober 1992

Zusammenfassung. Kapitel 2 und Anhang C geben eine Einleitung in die Gravitationslinsentheorie in ihrer reellen und komplexen Darstellung, während das dritte Kapitel diese Theorie in ein kosmologisches Modell einbettet. Das vierte und das fünfte Kapitel bilden den Kern dieser Arbeit. Sie diskutieren sogenannte isotherme, elliptische Linsenmodelle.

Kapitel 4 bespricht das einfachere der beiden Linsenmodelle, das singuläre isotherme Ellipsoid, nachdem im Abschnitt 4.1 die Bedeutung isothermer Modelle geklärt worden ist. Für die Flächenmassendichte κ solcher Modelle gilt $\kappa(r) \propto r^{-1}$. Es zeichnet sich also durch zwei Idealisierungen aus, nämlich eine unendlich große Gesamtmasse der Linse und eine divergierende Flächenmassendichte im Linsenzentrum. Nach einer Zusammenfassung der Ergebnisse für den rotations-symmetrischen Fall der singulären isothermen Sphäre (Abschnitt 4.2), einem Modell, das aufgrund der einfachen Handhabung weite Verbreitung in der Linsentheorie gefunden hat, zeigt diese Arbeit, daß eine nahezu vollständige analytische Behandlung auch noch möglich ist, wenn die Linse auf elliptische Symmetrie verallgemeinert wird. Wir werden sowohl das Modell mit exakter elliptischer Symmetrie (Abschnitt 4.4) als auch eine Multipolentwicklung davon (Abschnitt 4.3) diskutieren. Die Multipolentwicklung besitzt den wesentlichen Vorteil, daß sie, wenn wir sie nur bis zum Dipolterm ausführen, eine mit geringem numerischen Aufwand auflösbare Linsengleichung ergibt. Dieses Modell besitzt weiterhin eine sehr angenehme mathematische Eigenschaft: Die Verstärkungsmatrix stimmt, wenn wir sie in Abhängigkeit der Flächenmassendichte ausdrücken, unabhängig von der Elliptizität der Linse und der Ordnung der Entwicklung mit der der singulären isothermen Sphäre überein. Das wird im Anhang B bewiesen.

Während sich die erste der beiden oben angesprochenen Idealisierungen durch ein „Abschneiden“ der Flächenmassendichte bei einer bestimmten Dichte beheben läßt, widmet sich das ganze fünfte Kapitel einem Modell, das die zweite Idealisierung aufgibt. Wir müssen aber gleichzeitig akzeptieren, daß die analytische Behandlung dieses Modells, das wir nichtsinguläres isothermes Ellipsoid nennen werden, nur mehr sehr begrenzt möglich ist. Jedoch können wir dabei etwas über die Auswirkungen der idealisierten Flächenmassendichte des singulären Modells auf die beobachteten Effekte erfahren.

Das sechste und abschließende Kapitel wird das einfachere der beiden Modelle, das singuläre isotherme Ellipsoid, in der Linsenstatistik anwenden. Dabei werden wir erkennen, wie stark sich die Integraldarstellung der Wahrscheinlichkeit von Linseneffekten vereinfachen läßt und außerdem werden wir einige sehr grundlegende Ergebnisse erörtern.

Der theoretisch arbeitende Naturforscher ist nicht zu beneiden, denn die Natur oder genauer gesagt: das Experiment, ist eine unerbittliche und wenig freundliche Richterin seiner Arbeit. Sie sagt zu einer Theorie nie „ja“, sondern im günstigsten Falle „vielleicht“, in den meisten Fällen aber einfach „nein“. Stimmt ein Experiment zur Theorie, bedeutet es für letztere „vielleicht“, stimmt es nicht, so bedeutet es „nein“.

Wohl jede Theorie wird einmal ihr „nein“ erleben, die meisten schon bald nach ihrer Entstehung.

Eintragung von Albert Einstein in das Erinnerungsbuch von Prof. Kammerlingh-Onnes am 11. November 1922

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Die Gravitationslinsentheorie	7
2.1	Die Linsengleichung und das Fermat-Potential	7
2.2	Verstärkung, kritische Kurven und Kaustiken	10
2.3	Falten und Spitzen	12
2.3.1	Morse-Punkte	13
2.3.2	Die Falte	13
2.3.3	Die Spitze	16
2.3.4	Katastrophen höherer Ordnung	17
3	Das kosmologische Modell	19
3.1	Friedmann-Lemaître-Universen	20
3.2	Lichtausbreitung und Entfernungsmaße	22
3.2.1	Geometrische Optik im gekrümmten Raum	22
3.2.2	Strahlenbündel und Entfernungsmaße	22
3.3	Das Modell-Universum	24
3.4	Gravitationslinsen im Modell-Universum	25
4	Singuläre isotherme Linsenmodelle	31
4.1	Modellierung von Galaxien	31
4.1.1	Elliptische Galaxien	31
4.1.2	Spiralgalaxien	36
4.2	Die singuläre isotherme Sphäre	37
4.3	Die Multipolentwicklung der SIE-Linse	38
4.4	Das singuläre isotherme Ellipsoid	48
5	Nichtsinguläre isotherme Linsenmodelle	61
5.1	Die nichtsinguläre isotherme Sphäre	61
5.2	Das nichtsinguläre isotherme Ellipsoid	65

6	Eine Statistik isothermer Linsen	75
6.1	Linsenstatistik	75
6.1.1	Das statistische Integral	75
6.1.2	Das statistische Integral für SIE- M_q -Linsen	78
6.2	Die Statistik der SIE-Linse	80
A	Die Multipolentwicklung	89
B	Die Verstärkung der SIE-M_q-Linsen	93
C	Komplexe Darstellung der Linsentheorie	97
D	Das Gittersuchverfahren	103

Kapitel 1

Einleitung

Die Idee, daß die Gravitation Einfluß auf die Ausbreitung von Licht nehmen könnte, ist beinahe so alt wie die moderne Physik. Sir I. Newton äußerte sie bereits 1704 in der ersten Ausgabe seines Werkes „Opticks“. Fassen wir nämlich Licht als einen Strom von Teilchen auf, der sich mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet, so können wir die Ablenkung eines Lichtstrahls im Newtonschen Gravitationsfeld bestimmen. Passiert dieser einen kugelförmigen Körper der Masse M im Abstand R , so erhalten wir im Grenzfall eines kleinen Ablenkwinkels α das Ergebnis

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2 R} \quad ,$$

wobei G die Gravitationskonstante bezeichnet. Daraus schloß der Münchner Astronom J. Soldner im Jahr 1801, daß dieser Wert für Sternmassen viel zu klein sei, um praktische Bedeutung in der zeitgenössischen Astronomie zu erlangen.

A. Einstein bestätigte dieses Ergebnis für den Ablenkwinkel 1911, indem er das Äquivalenzprinzip und die Annahme eines euklidischen Raumes zugrundelegte. Er korrigierte diesen Wert im Jahr 1915 um den Faktor zwei mit Hilfe der von ihm aufgestellten Allgemeinen Relativitätstheorie. Dieser verbesserte Wert wurde 1919 durch eine von A. S. Eddington geleitete wissenschaftliche Expedition bestätigt. Sie vermaßen die Position von Sternen, deren Licht den Rand der Sonne passierte und das während des kurzen Moments einer totalen Sonnenfinsternis wahrnehmbar war. Dabei konnten sie den von der Allgemeinen Relativitätstheorie geforderten Wert auf 20 Prozent genau bestätigen. Heutige Messungen erreichen eine Genauigkeit von einem Promille. Am Rande sei hier bemerkt, daß diese Beobachtung den plötzlichen Ruhm Einsteins begründete.

Die Möglichkeit, daß die Gravitationswirkung eines Sternes einen nahezu exakt dahinterliegenden Stern für einen irdischen Beobachter zweimal erscheinen lassen könnte, wurde zum ersten Mal von Eddington 1920 und O. Chwolson 1924 erwähnt. Letzterer zog auch in Betracht, daß das Licht des hinteren Sterns für den Fall ihrer Kollinearität mit dem Beobachter den vorderen Stern in Form eines Ringes umgeben könnte. Dieser

Ring wird heutzutage als „Einstein-Ring“ bezeichnet. Sie schilderten damit als erste die heute bekannten, „dramatischeren“ Effekte von Gravitationslinsen. Einstein bemerkte allerdings 1936 seine Skepsis über die Beobachtbarkeit dieser Phänomene, sofern die Linsen durch Sterne gebildet werden.

Den Schritt, nicht Sterne, sondern ganze Galaxien als mögliche Gravitationslinsen zu sehen, machte F. Zwicky im Jahr 1937. Dabei nahm er einige Möglichkeiten, die uns Gravitationslinsen als astronomisches „Werkzeug“ bieten, vorweg. So erkannte er, daß uns die Verstärkung der Lichtintensität durch Linsen einen tieferen Blick in das Universum erlauben könnte und daß die Struktur der Bilder Rückschlüsse auf die Masse von Galaxien zuließe. Außerdem bekundete er seine Zuversicht über die zukünftige Entdeckung solcher Linsen. Seine Überlegungen gerieten jedoch aufgrund fehlender Beobachtungen in Vergessenheit und wurden erst in den sechziger und siebziger Jahren mit der Erforschung von QSOs zu neuem Leben erweckt. Mit diesen Objekten standen jetzt Lichtquellen zur Verfügung, die wegen ihrer großen Entfernung eine gute Chance hatten, „gelingt“ zu werden. Die tatsächliche Beobachtung der ersten Gravitationslinse mußte jedoch noch bis zum Jahr 1979 mit der Entdeckung von QSO 0957+561 durch D. Walsh, R. F. Carswell und R. J. Weymann warten.

Die noch heute akzeptierte approximative Darstellung von Gravitationslinsen wurde im Jahr 1964 von S. Refsdal und S. Liebes Jr. eingeführt. In den Jahren 1973 bis 1976 entwickelten R. R. Bourassa und R. Kantowski eine komplexe Darstellung der Gravitationslinsentheorie. Sie ist besonders wirkungsvoll bei Linsenmodellen mit elliptischer Symmetrie und dient daher auch als Grundlage für Teile dieser Arbeit.

Notation. Die Notation hält sich fast vollständig an den von [Schneider et al. 1992] gegebenen Standard. Ausnahmen bilden die leicht geänderte Form der Darstellung von Entwicklungskoeffizienten des Fermat-Potentials (z. B. $\Phi_{2,0}$ statt ϕ_{11}), die im Abschnitt 2.3 erklärt wird, und die Bezeichnung Δ für die Leuchtkraftentfernung statt D_L . Als Besonderheit ist noch zu erwähnen, daß Matrizen in der Schriftart Roman gesetzt sind (A statt der sonst weit verbreiteten Setzung A) und daß die Faltung von Matrizen untereinander und mit den als Matrizen interpretierten Vektoren durch einen Punkt angedeutet wird (z. B. $\mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{x}$). Variablen aus der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} werden durch die Schriftart Sans Serif hervorgehoben. So bezeichnet zum Beispiel \mathbf{x} die komplexe Entsprechung des reellen, zweidimensionalen Vektors \mathbf{x} . Die komplexe Konjugation wird durch den Stern, wie zum Beispiel \mathbf{x}^* , angedeutet.

Im dritten Kapitel bezeichnen die Größen \mathbf{x} und \mathbf{y} den „Raumanteil“ der Robertson-Walker- beziehungsweise der Post-Newton-Metrik. In den übrigen Kapiteln sind sie wie bei [Schneider et al. 1992] als Vektoren in der Linsen- und Quellenebene verwendet.

Die im vierten und fünften Kapitel verwendete Notation wollen wir noch etwas detaillierter betrachten. Wir verwenden Polarkoordinaten $\mathbf{x} := (r \cos \phi, r \sin \phi)$ in der Linsen- und kartesische Koordinaten $\mathbf{y} := (y_1, y_2)$ in der Quellenebene. Im Fall der rotationssym-

metrischen Linsen führen wir noch $x := \pm r$ ein— x kann also im Gegensatz zu r mit einem negativen Vorzeichen versehen sein, während $y := |\mathbf{y}|$ durchweg den Betrag des Vektors \mathbf{y} darstellt. \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 sind die Einheitsvektoren auf der 1- und der 2-Achse. Für rotationssymmetrische Linsen besitzt noch der Einheitsvektor $\mathbf{e}_y := \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ eine Bedeutung. Die sehr langen Benennungen der Linsenmodelle werden durch ihre Initialen abgekürzt, wie zum Beispiel SIS-Linse für die singuläre isotherme Sphäre oder NIE-Linse für das nichtsinguläre isotherme Ellipsoid. Multipolentwicklungen der elliptischen Linsenmodelle bekommen die Erweiterung „Mq“ an den abgekürzten Namen, wobei q die höchste Ordnung der Entwicklung bezeichnet. So ist SIE-M1-Linse die Abkürzung für die Entwicklung der SIE-Linse bis zur Dipolordnung. Alle darauf bezogenen Größen erhalten den obere Index (q), wie zum Beispiel $\kappa^{(q)}$, das die Multipolentwicklung der elliptischen Flächenmassendichte $\kappa = \kappa^{(\infty)}$ bis zur q -ten Ordnung andeutet. $0 < f \leq 1$ bezeichnet das Hauptachsenverhältnis in Ellipsen fester Flächenmassendichte und f' ist eine häufig verwendete Abkürzung von $f' := \sqrt{1 - f^2}$. Der winkelabhängige Ausdruck $\sqrt{\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi}$ wird mit $\Delta(\phi)$ abgekürzt. Gelegentlich erweisen sich nichtorthogonale elliptische Koordinaten b und θ , die durch $\mathbf{x} =: (b \cos \theta, \frac{b}{f} \sin \theta)$ definiert sind, als zweckmäßig. Der senkrechte Strich in $\beta_{|i}$ schließlich bezeichnet die Größe β , genommen an den durch den diskreten Index i angedeuteten Punkten.

Diese Arbeit verwendet nahezu durchgehend punktförmige Lichtquellen—eine Idealisierung, die am Ende von Abschnitt 2.2 diskutiert wird.

Kapitel 2

Die Gravitationslinsentheorie

2.1 Die Linsengleichung und das Fermat-Potential

Um eine Gravitationslinse mathematisch möglichst einfach zu beschreiben, wollen wir uns zunächst mit den typischen Skalen eines solchen Gebildes beschäftigen. Dazu werden wir jetzt der Einfachheit halber so tun, als befände sich die Linse dreidimensionalen, Euklidischen Raum. Wie sich die hier zu entwickelnden Vorstellungen später auf ein Allgemein-relativistisches Modell-Universum übertragen, wird in Kapitel 3 und dort besonders im Abschnitt 3.4 besprochen werden.

Für diese Beschreibung teilen wir den Weg, den ein Lichtstrahl nimmt, wenn er der Wirkung einer Gravitationslinse ausgesetzt ist, in drei Abschnitte: einem ersten, in dem sich der Strahl zwischen Quelle und Linse befindet, einem zweiten, in dem er die Linse passiert, und einem dritten, in dem er von der Linse zum Beobachter reist. Die Ausdehnung des zweiten Abschnitts wird durch die Genauigkeit bestimmt, mit der wir das Gravitationspotential berücksichtigen wollen. Für eine typische Linsensituation ist dieser um einige Größenordnungen kleiner als die beiden anderen. Deshalb stellen wir uns vor, daß er auf eine Ebene im Raum begrenzt wäre, bei der der Lichtstrahl einen Knick erfährt. In diese Ebene denken wir uns auch die Linse projiziert, so daß aus deren dreidimensionaler Materiedichte eine Flächenmassendichte Σ wird. Wir wollen sie *Linsenebene* nennen. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, die Lichtquelle, die wir im allgemeinen als punktförmig betrachten, ebenfalls in eine zur Linsenebene parallele Ebene zu legen, zu der wir entsprechend *Quellenebene* sagen. Den Beobachter verbinden wir mit den beiden Flächen durch eine zu den Ebenen orthogonale Gerade, die *optische Achse* heißen soll. Diese Situation ist in Abb. 2.1 dargestellt. Nun führen wir in beiden Ebenen Koordinatensysteme ein, deren Ursprünge durch die optische Achse markiert werden und die parallel zueinander ausgerichtet sind. Die Position der Quelle in der entsprechenden Ebene ist dann durch den Vektor $\boldsymbol{\eta}$ gegeben, der Durchstoßpunkt des Lichtstrahls durch die Linsenebene, der Bildort, ist $\boldsymbol{\xi}$. Aus Abb. 2.1 erhalten wir eine Beziehung zwischen

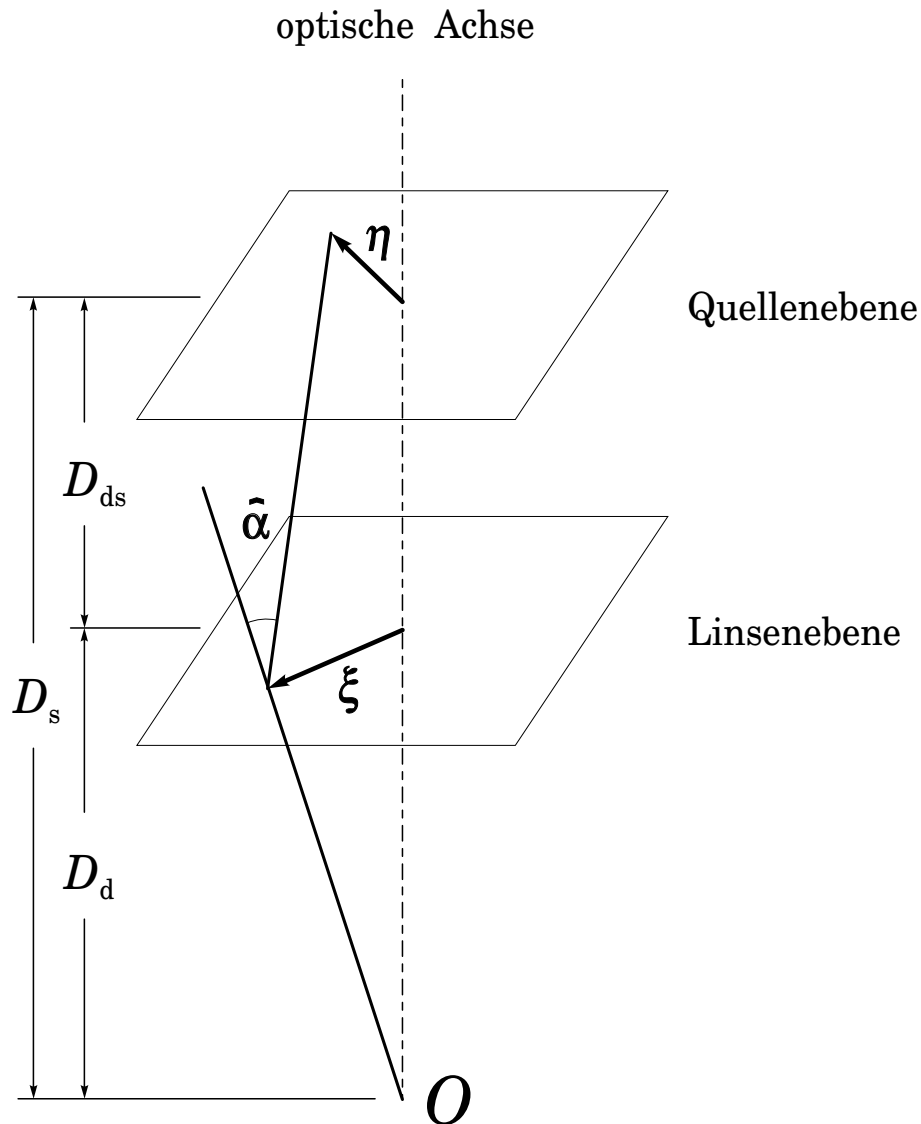


Abbildung 2.1: Eine Gravitationslinse. Die Quelle befindet sich in der Quellenebene, die Linse wird in die Linsenebene projiziert. Die optische Achse verbindet diese Ebenen mit dem Beobachter O . Quell- und Bildort bezeichnen die Vektoren η und ξ . Der Ablenkwinkel ist durch $\hat{\alpha}$ gegeben. D_{ds} , D_d und D_s sind die Abstände der Ebenen untereinander und zum Beobachter.

diesen beiden Vektoren:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \boldsymbol{\xi} - D_{ds} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) \quad , \quad (2.1)$$

worin wir den Abstand des Beobachters O von der Linsenebene mit D_d , den von der Quellenebene mit D_s und den der Ebenen untereinander mit D_{ds} bezeichnet haben. Diese Gleichung bildet die Grundlage der Linsentheorie und heißt (*dimensionsbehaftete Linsengleichung*). Wie wir im Abschnitt 3.4 sehen werden, errechnet sich der *Ablenkwinkel* $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})$ aus der Flächenmassendichte im Grenzfall kleiner Ablenkwinkel durch

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d^2 \xi' \quad , \quad (2.2)$$

wobei wir über die gesamte Linsenebene integrieren müssen.

Die Algebra erleichtern wir uns dadurch, daß wir eine Längenskala ξ_0 in der Linsenebene und eine entsprechend projizierte Skala $\eta_0 := \frac{D_s}{D_d} \xi_0$ in der Quellenebene einführen und dann die Linsengleichung darauf beziehen:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.3)$$

Darin sind $\mathbf{x} := \frac{1}{\xi_0} \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y} := \frac{1}{\eta_0} \boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) := \frac{D_d D_{ds}}{\xi_0 D_s} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_0 \mathbf{x})$. Diese Gleichung heißt (*dimensionslose Linsengleichung*). Führen wir noch eine dimensionslose Flächenmassendichte $\kappa(\mathbf{x}) := \frac{1}{\Sigma_{cr}} \Sigma(\xi_0 \mathbf{x})$ ein, wobei die *kritische Flächenmassendichte* $\Sigma_{cr} := \frac{c^2 D_s}{4\pi G D_d D_{ds}}$ ist, so errechnen wir den Ablenkwinkel gemäß

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^2 x' \quad .$$

Physikalisch ist Σ_{cr} diejenige Flächenmassendichte, die nötig wäre, um alle vom Ursprung der Quellenebene nahe der optischen Achse und in Richtung des Beobachters ausgehenden Lichtstrahlen auf diesen zu fokussieren. Denn dann gilt $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, wodurch die Linsengleichung die Linsenebene auf den Ursprung der Quellenebene abbildet.

Wenden wir die Identität $\nabla \ln |\mathbf{x}| \equiv \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$ auf den Ablenkwinkel an, so sehen wir, daß sich

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \psi$$

als Gradient eines *Ablenkpotentials* $\psi(\mathbf{x})$ schreiben läßt, wobei

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\mathbf{x}') \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d^2 x'$$

ist. Die Linsengleichung lautet dann

$$\nabla \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad , \quad (2.4)$$

wenn wir das sogenannte *Fermat-Potential* $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ durch

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 - \psi(\mathbf{x})$$

definieren. Dessen Bezeichnung rührt daher, daß Gl. (2.4) das Fermatsche Prinzip in der Näherung der Linsentheorie ausdrückt, denn ϕ ist eine affine Funktion der Lichtlaufzeit¹. Eine weitere Identität, nämlich² $\nabla^2 \ln |\mathbf{x}| \equiv 2\pi\delta^2(\mathbf{x})$, liefert uns die *Poisson-Gleichung* (der Gravitationslinsentheorie),

$$\nabla^2\psi = 2\kappa \quad . \quad (2.5)$$

Es zeigt sich, daß es zu einem Quellvektor \mathbf{y} mehrere Linsenvektoren \mathbf{x} geben kann, die die Linsengleichung lösen. Wir werden daher von den *Bildern* einer Quelle sprechen. Im fünften Kapitel von [Schneider et al. 1992] wird gezeigt, daß die Anzahl dieser Bilder unter der Annahme einer im mathematischen Sinn beschränkten Flächenmassendichte $\kappa(\mathbf{x})$, die für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ schneller als $|\mathbf{x}|^{-2}$ abfällt, (bis auf die Ausnahme einer Menge vom Maß null an Quellpositionen in der entsprechenden Ebene, die wir später Kaustik nennen werden) ungerade ist. Die Bildanzahl ist für sehr große Quellvektoren \mathbf{y} gleich eins. Außerdem gibt es keine Quellposition ohne Bild. Mathematisch gesprochen ist die Linsenabbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ also surjektiv, aber nicht injektiv³.

2.2 Verstärkung, kritische Kurven und Kaustiken

Die Inverse der Jacobimatrix der Linsengleichung (2.3)

$$A(\mathbf{x}) := \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$$

beschreibt die Verzerrung eines Flächenelements durch die Linse, der Kehrwert der Determinante von A

$$\mu(\mathbf{x}) := \frac{1}{\det A(\mathbf{x})} \quad , \quad (2.6)$$

¹Die Funktion ϕ ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, so daß wir damit nur Laufzeitunterschiede messen können.

² $\delta^2(\mathbf{x})$ bezeichnet die zweidimensionale Diracsche Delta-Distribution $\delta^2(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)$.

³Wir werden uns im vierten Kapitel mit Linsenmodellen beschäftigen, die weder die Beschränktheit von κ , noch das Kriterium für den hinreichend schnellen Abfall erfüllen. Während die Verletzung des zweiten Kriteriums die Aussagen nicht beeinflusst (für den Beweis der Behauptungen ist nur die Beschränktheit des Betrags des Ablenkwinkels nötig), wird durch die im Ursprung nicht differenzierbare Flächenmassendichte die Bildanzahl bei mehr als einem Bild gerade. Im Kapitel 5 wird die Flächenmassendichte so verändert, daß sie das erste Kriterium erfüllt und die Bildanzahl wird damit wieder ungerade.

das Verhältnis eines infinitesimal kleinen orientierten Flächenelements der Linsenebene zu dessen Abbild in der Quellenebene. Die Größe dieser Flächenelemente ist proportional zum Strahlungsfluß, den der Beobachter mit beziehungsweise ohne Linse messen würde—wobei wir uns leicht überzeugen können, daß die Proportionalitätskonstanten für beide Fälle gleich sind. $|\mu|$ bezeichnet also die *Verstärkung* eines Bildes relativ zu dessen Quelle, wenn wir von durchsichtigen⁴ Gravitationslinsen ausgehen. Das Vorzeichen von μ bestimmt die Orientierung der Flächenelemente zueinander. Davon abhängig wollen wir von Bildern mit *positiver* oder *negativer Parität* sprechen. A heißt auch *Verstärkungsmatrix*. Aus der Linsengleichung folgt für die Verstärkungsmatrix⁵ $A_{ij} = \phi_{,ij} = \delta_{ij} - \psi_{,ij}$. Mit Hilfe der Poisson-Gleichung (2.5) schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix},$$

wobei wir $\gamma_1 := \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22})$ und $\gamma_2 := \psi_{,12}$ definieren. Bezeichnen wir noch $\gamma := \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$, so sind die Determinante von A , deren Spur und deren Eigenwerte $a_{1,2}$ gegeben durch

$$\det A = (1 - \kappa)^2 - \gamma^2 \quad (2.7)$$

$$\operatorname{tr} A = 2(1 - \kappa) \quad (2.8)$$

$$a_{1,2} = 1 - \kappa \mp \gamma.$$

Die darin mehrfach wiederkehrenden Terme $1 - \kappa$ und γ heißen *Konvergenz* beziehungsweise *Scherung* und entsprechen der Ricci-Fokussierung beziehungsweise der Scherung in der Fokusgleichung (3.4).

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt festgestellt, liefern die kritischen Punkte des Fermat-Potentials, also die Punkte mit $\nabla\phi = 0$, die Bilder zu einer gegebenen Quellposition. Setzen wir voraus, daß $\det A$ an der Stelle eines Bildes nicht verschwindet, so lassen sich derartige *nicht-kritische Bilder* in drei Klassen unterteilen, je nachdem ob das Bild Resultat eines Minimums, eines Sattelpunkts oder eines Maximums des Potentials ist. Für erstere gilt $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A > 0$, für die Maxima $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A < 0$ sowie für die Sättel $\det A < 0$. Daraus erkennen wir mit den obigen Glen. (2.7) und (2.8), daß Bilder an Minima des Potentials immer verstärkt sind, d. h. es gilt $|\mu| \geq 1$. Da aber jedes Fermat-Potential ein Minimum besitzt, führt ein Linsenereignis also immer zu einer Vergrößerung des Gesamtflusses, den ein Beobachter von einer Quelle erhält: μ_p als Summe der Beträge der Verstärkung aller Bilder ist immer größer als eins. Extremwerte ergeben Bilder positiver Parität, Sättel führen zu solchen negativer Händigkeit.

⁴Mit dem Begriff „durchsichtig“ ist gemeint, daß in der Linsenebene kein Strahlungsverlust auftreten soll.

⁵ A_{ij} bezeichnet die Koeffizienten der Verstärkungsmatrix, der durch Komma abgetrennte Index die partielle Ableitung der jeweiligen Größe nach dieser Komponente und δ_{ij} das Kronecker-Symbol.

Bildpunkte, für die $\det A = 0$ gilt, stellen eine Besonderheit der Linsenabbildung dar. Sie bilden im Regelfall glatte Linien in der Linsenebene, die sich nicht überschneiden. Wir nennen sie *kritische Kurven*. Wenden wir die Linsengleichung darauf an, so ergeben sich Kurven in der Quellenebene, die sich sowohl überschneiden als auch Spitzen haben können. Diese bezeichnen wir in Analogie zur gewöhnlichen Strahlenoptik als *Kaustiken*. Aus „lokalen“ Betrachtungen des Fermat-Potentials, die wir im nächsten Abschnitt andeuten wollen, ist bekannt, daß sich die Anzahl der Bilder einer Quelle beim Überschreiten einer Kaustik um zwei ändert. Daran oder an einfachen topologischen Vorstellungen bezüglich des Fermat-Potentials erkennen wir für glattes ϕ und eine Quelle, die nicht auf einer Kaustik liegt, auch ohne den formalen Beweis in [Schneider et al. 1992], daß die Bildanzahl ungerade ist. Die Verstärkung μ , die wir in Gl. (2.6) definiert haben, divergiert entsprechend auf den kritischen Kurven. Dieses scheinbar unphysikalische Verhalten erklärt sich dadurch, daß die strahlengeometrischen Überlegungen, die diesem Begriff zugrunde liegen, in der Umgebung von Kaustiken ihre Gültigkeit verlieren und wir genötigt wären, im Begriff der Verstärkung wellenoptische Phänomene mit zu berücksichtigen. Dies würde enorme Komplikationen mit sich bringen. Glücklicherweise ist dieses Versagen aber nicht so ernst. Um nämlich die Gesamtverstärkung μ_g einer ausgedehnten (realistischen) Quelle zu bestimmen, haben wir folgendes Integral zu bestimmen:

$$\mu_g = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x}) d^2x}{\int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{y}) d^2y} = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x}) d^2x}{\int_{\mathbb{R}^2} \ell(\mathbf{x}) |\mu^{-1}(\mathbf{x})| d^2x} \quad .$$

Darin bezeichnen $\ell(\mathbf{x})$ und $\ell(\mathbf{y}) = \ell(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ die Flußdichte in der Linsen- bzw. Quellenebene. Da sich die Ungültigkeit der geometrischen Optik aber auf eine kleine Umgebung der kritischen Linie beschränkt, spielt sie für μ_g keine wesentliche Rolle.

2.3 Falten und Spitzen

Nun wollen wir uns mit dem lokalen Verhalten kritischer Kurven und deren Kaustiken auseinandersetzen. Dazu nützen wir die Tatsache aus, daß die Linsengleichung eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ ist, die nach Gl. (2.4) durch den Gradienten eines Potentials ϕ bestimmt wird. In einem besonderen Zweig der Mathematik, nämlich der sogenannten *Katastrophentheorie*, werden die lokalen Eigenschaften solcher Abbildungen und besonders deren Singularitäten, die in unserem Zusammenhang Kaustiken heißen, untersucht. Diese Theorie verwendet nichtlineare Transformationen in den Komponenten der Abbildungen um die Singularitäten zu klassifizieren, was quantitative Aussagen innerhalb der Linsentheorie sehr erschwert. Deren Klassifikation werden wir aber übernehmen. Außerdem müssen wir uns hier auf die Diskussion der „einfachsten“ *Katastrophen*, der Falte und der Spitze, beschränken. Dies wird aber ausreichend für die Behandlung der Linsenmodelle in den Kapiteln 4 und 5 sein. Eine gründlichere Einführung in diesen Themenbereich

liefert vom Standpunkt der Linsentheorie aus Kap. 6 von [Schneider et al. 1992], für eine mathematisch orientierte Abhandlung der Katastrophentheorie sei auf das Buch von [Poston, Steward 1978] verwiesen.

Grundlage unserer Diskussion bildet, wie gesagt, das Fermat-Potential $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 - \psi(\mathbf{x})$, das wir um eine Bild- und die zugehörige Quellposition Taylor-entwickeln wollen. Es lautet bis zu den für die weiteren Betrachtungen wesentlichen Ordnungen⁶:

$$\begin{aligned} \phi = & -\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{6}\Phi_{3,0} x_1^3 + \frac{1}{2}\Phi_{2,1} x_1^2 x_2 + \\ & + \frac{1}{2}\Phi_{1,2} x_1 x_2^2 + \frac{1}{6}\Phi_{0,3} x_2^3 + \frac{1}{24}\Phi_{0,4} x_2^4 \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Darin haben wir ausgenutzt, daß wir additive Konstanten im Fermat-Potential weglassen können und daß im Ursprung der neu gewählten Koordinatensysteme, in denen die Quelle bei $\mathbf{y} = 0$ und das Bild bei $\mathbf{x} = 0$ liegt, die Linsengleichung (2.3) erfüllt ist. \mathbf{A} und $\Phi_{i,j}$ bezeichnen die Jacobi-Matrix und die i - beziehungsweise j -malige partielle Ableitung des Fermat-Potentials bezüglich x_1 beziehungsweise x_2 im neuen Ursprung⁷. Jetzt können wir in Abhängigkeit des Rangs von \mathbf{A} die Kaustiken klassifizieren.

2.3.1 Morse-Punkte

Ist der Rang von \mathbf{A} zwei oder gleichbedeutend damit $\det \mathbf{A} \neq 0$, so handelt es sich um ein nicht-kritisches Bild. Die Linsengleichung lautet dann lokal $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, sie ist somit linear und bijektiv, also (lokal) umkehrbar. Die Verstärkung $\frac{1}{\det \mathbf{A}}$ und deshalb auch die Art des Bildes, die wir im vorangegangenen Abschnitt betrachtet haben, sind unabhängig vom Bildort.

2.3.2 Die Falte

Schwieriger wird die Situation, wenn sich der Rang von \mathbf{A} auf eins erniedrigt, also $D := \det \mathbf{A} = 0$ gilt, während $\nabla D \neq 0$ sein soll. Dann befindet sich der Punkt $\mathbf{y} = 0$ auf einer Kaustik und das Bild $\mathbf{x} = 0$ auf einer kritischen Kurve. Führen wir einen Tangentialvektor an die kritische Kurve $\mathbf{T} := \mathbf{R} \cdot \nabla D$ ein, worin $\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Rotation um $\frac{\pi}{2}$ bedeutet, so können wir die Singularitäten der Kaustik in zwei Klassen einteilen, je nachdem, ob das Abbild von \mathbf{T} verschwindet, also $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = 0$ ist, oder nicht. Der erste Fall heißt Spitze, und wir wollen diesen im nächsten Abschnitt behandeln, der zweite heißt Falte. Für die Spitze ist noch vorausgesetzt, daß $(\mathbf{T} \cdot \nabla)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \neq 0$ gilt. Dies bedeutet, daß der Winkel zwischen dem Tangentialvektor und dem Eigenvektor zum Eigenwert null nur eine einfache Nullstelle hat.

⁶Die Entscheidung, welche Terme nötig und welche überflüssig sind, kann erst nach gründlicher Untersuchung der Linsengleichung und der Matrix \mathbf{A} getroffen werden.

⁷ \mathbf{y} und eventuelle Linsenparameter sowie \mathbf{x} heißen in der Katastrophentheorie Kontroll- beziehungsweise Zustandsvariable.

Legen wir die Richtung der neuen Koordinatensysteme dadurch fest, daß A diagonal wird und nur A_{11} nicht verschwindet, so schreibt sich die Linsengleichung $\nabla\phi = 0$ wie

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_{2,0} x_1 + \frac{1}{2}\Phi_{1,2} x_2^2 + \Phi_{2,1} x_1 x_2 \\ y_2 &= \frac{1}{2}\Phi_{2,1} x_1^2 + \Phi_{1,2} x_1 x_2 + \frac{1}{2}\Phi_{0,3} x_2^2 \end{aligned} \quad ,$$

wobei wir nur die führenden Terme berücksichtigt haben. Bilden wir davon die Verstärkungsmatrix⁸

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_{2,0} + \Phi_{2,1} x_2 & \Phi_{2,1} x_1 + \Phi_{1,2} x_2 \\ \Phi_{2,1} x_1 + \Phi_{1,2} x_2 & \Phi_{1,2} x_1 + \Phi_{0,3} x_2 \end{pmatrix}$$

und lösen die Bedingungsgleichung $D = 0$ für eine kritische Kurve, so ergibt sich diese als Gerade, die durch die Gleichung $\nabla D \cdot \mathbf{x} = 0$ gegeben ist, wobei $\nabla D = (\Phi_{2,0} \Phi_{1,2}, \Phi_{2,0} \Phi_{0,3})$ gilt. Deren Abbild in der Quellenebene ist eine Parabel $Q(\mathbf{y}) := 2\Phi_{2,0}\Phi_{0,3}y_2 - (\Phi_{2,1}\Phi_{0,3} - \Phi_{1,2}^2)y_1^2 = 0$. Wir nennen sie *Falte*. Sie trennt lokal die Quellenebene in zwei Hälften. Sitzt die Quelle in der Hälfte $Q(\mathbf{y}) > 0$, die wir als die *positive Seite* bezeichnen werden, so ergeben sich lokal zwei Lösungen der Linsengleichung, nämlich

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Phi_{0,3} y_1 - \Phi_{1,2} y_2}{\Phi_{2,0} \Phi_{0,3}} \\ x_2 &= \frac{-\Phi_{1,2} y_1 \pm \sqrt{Q(\mathbf{y})}}{\Phi_{2,0} \Phi_{0,3}} \end{aligned} \quad ,$$

die sich auf beiden Seiten der kritischen Linie befinden. Definieren wir den Abstand δy_2 der Quelle von der Kaustik längs der 2-Achse durch

$$\delta y_2 := \frac{Q(\mathbf{y})}{2\Phi_{2,0}^2 \Phi_{0,3}} \quad ,$$

so ist der Bildabstand damit durch

$$\delta x = 2\sqrt{2\Phi_{0,3}^{-1} \delta y_2}$$

gegeben. Überschreitet die Quelle die Kaustik zur *negativen Seite* hin, so verschmelzen dabei entsprechend dieser Beziehungen die beiden Bilder auf der kritischen Linie und verschwinden dann, da $Q(\mathbf{y})$ negativ wird. Setzen wir die Bildpositionen in die Jacobimatrix $A(\mathbf{x})$ ein, so erhalten wir für den Betrag die Verstärkung eines dieser Bilder

$$|\mu| = \frac{1}{|\Phi_{2,0}| \sqrt{2\Phi_{0,3} \delta y_2}} = \tag{2.10}$$

⁸Die Koeffizienten A der Taylorentwicklung (2.9) hängen mit $A(\mathbf{x})$ über die Beziehung $A(\mathbf{x} = 0) = A$ zusammen. Die Größen D und \mathbf{T} beziehungsweise ∇D sind ebenfalls im Ursprung $\mathbf{x} = 0$ genommen.

$$= \frac{2}{|\Phi_{2,0} \Phi_{0,3}|} \frac{1}{\delta x} = \quad (2.11)$$

$$= \frac{2}{|\mathbf{e}_2 \cdot \nabla D|} \frac{1}{\delta x} \quad (2.12)$$

Die Verstärkung steigt also dabei ins Unendliche. Im Ursprung unserer Entwicklung gilt $A = \text{diag}(\Phi_{2,0}, 0)$ und damit $R^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{T} = R^{-1} \cdot A \cdot R \cdot \nabla D = (0, \Phi_{2,0}^2 \Phi_{0,3})$. Daher können wir obige Beziehung auch koordinatenfrei darstellen:

$$\begin{aligned} |\mu| &= \frac{1}{\sqrt{2(R^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{y}}} = \\ &= \frac{2|\text{tr } A|}{|A \cdot \mathbf{T}|} \frac{1}{\delta x} \quad (2.13) \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch $\text{tr } A = \Phi_{2,0}$ und $|A \cdot \mathbf{T}| = |\Phi_{2,0}^2 \Phi_{0,3}|$ benutzt. Im Abschnitt 3.4 werden wir sehen, daß sich der Laufzeitunterschied δt zwischen zwei Bildern $\mathbf{x}^{(1,2)}$ aus dem Fermat-Potential zu

$$c \delta t = (1 + z_d) \frac{D_s \xi_0^2}{D_d D_{ds}} |\phi(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y})|$$

ergibt. Setzen wir also die beiden erhaltenen Bilder in das entwickelte Fermat-Potential ein, so können wir eine Näherung für den Unterschied in den Lichtlaufzeiten erhalten:

$$c \delta t = (1 + z_d) \frac{D_s \xi_0^2}{D_d D_{ds}} \frac{|A \cdot \mathbf{T}|}{12 |\text{tr } A|^2} (\delta x)^3 \quad (2.14)$$

z_d ist die Rotverschiebung (siehe dazu Abschnitt 3.1) der Linse.

Im Kapitel 6 werden wir die Bedeutung des Begriffs „Wirkungsquerschnitt“ näher erläutern, der eine Fläche in der Quellenebene bezeichnet, innerhalb derer das Linsenereignis eine bestimmte Eigenschaft erfüllt. Da die Eigenschaft „sehr hohe Gesamtverstärkung“ nur für Bilder auftritt, die sehr nahe bei einer kritischen Kurve oder deren Quellen auf der positiven Seite sehr nahe bei einer Kaustik liegen, können wir eine Näherungsformel für diesen Wirkungsquerschnitt gewinnen. Wir werden dazu folgendermaßen vorgehen: Die beiden Bilder besitzen, wie wir festgestellt haben, die gleiche Verstärkung und die gleiche Entfernung z zur kritischen Linie. Ihre Verstärkung ist durch die Beziehung $|\mu| = (|\nabla D|z)^{-1}$ gegeben. Dies können wir als die Entwicklung von $\det A$ nach dem Bildabstand z bis zur linearen Ordnung interpretieren. Sie ist überdies äquivalent zu Gl. (2.12), wenn wir berücksichtigen, daß $\delta x |\mathbf{e}_2 \cdot \nabla D| = 2|\nabla D|z$ gilt. Wenn wir nun ein Wegstück $d\lambda$ der kritischen Kurve $\gamma(\lambda)$ mit der Weglänge $d\ell = \left| \frac{d}{d\lambda} \gamma(\lambda) \right| d\lambda$ betrachten, so ist die Fläche $d\mathcal{A}_x$, innerhalb derer die Verstärkung zwischen $|\mu|$ und $|\mu| + d|\mu|$ liegt und das parallel zu dem Stück $d\lambda$ der kritischen Kurve verläuft, durch

$$d\mathcal{A}_x = -\frac{dz}{d|\mu|} d|\mu| d\ell = \frac{1}{|\mu|^2} \frac{1}{|\nabla D|} \left| \frac{d}{d\lambda} \gamma(\lambda) \right| d|\mu| d\lambda$$

gegeben. Bilden wir nun dieses Flächenstück auf die Quellenebene ab, $d\mathcal{A}_y = \frac{1}{|\mu|}d\mathcal{A}_x$, und berücksichtigen, daß die Gesamtverstärkung bis auf den zu vernachlässigenden Einfluß weiterer Bilder durch $\mu_p = 2|\mu|$ gegeben ist, so finden wir für den Verstärkungsquerschnitt

$$\sigma_f(\mu_p > \mu_{\min}) = \frac{2}{\mu_{\min}^2} \int \frac{d\ell}{|\nabla D(\gamma(\lambda))|} \quad . \quad (2.15)$$

Dabei müssen wir das Integral längs aller kritischen Linien der Linsenebene bilden. Außerdem haben wir dafür über die Verstärkung μ_p von μ_{\min} bis unendlich integriert. In Worten ausgedrückt bezeichnet nun dieser Verstärkungsquerschnitt die Fläche, innerhalb der die Quelle liegen muß, um eine Verstärkung größer als μ_{\min} zu erfahren. Schlecht wird diese Näherung dann, wenn der Beitrag der übrigen Bilder zur Gesamtverstärkung nicht mehr vernachlässigt werden darf. Dies ist dann der Fall, wenn wir uns in der Nähe einer Spitze befinden. Den Eigenschaften dieses Kaustik-Typs wollen wir uns nun zuwenden.

2.3.3 Die Spitze

Mit derselben Technik wie bei der Falte finden wir wegen $\Phi_{0,3} = 0$, das die Bedingung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = 0$ für eine Spitze widerspiegelt, für die Linsengleichung

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_{2,0} x_1 + \frac{1}{2}\Phi_{1,2} x_2^2 + \Phi_{2,1} x_1 x_2 \\ y_2 &= \frac{1}{2}\Phi_{2,1} x_1^2 + \Phi_{1,2} x_1 x_2 + \frac{1}{6}\Phi_{0,4} x_2^3 \quad . \end{aligned}$$

Die kritische Kurve ist durch eine Parabel⁹

$$x_1 = \frac{2\Phi_{1,2}^2 - \Phi_{0,4} \Phi_{2,0}}{2\Phi_{1,2} \Phi_{2,0}} x_2^2$$

und die zugehörige Kaustik durch eine semikubische Parabel

$$y_1^3 = \frac{9\Phi_{2,0}^2 (3\Phi_{1,2}^2 - \Phi_{0,4} \Phi_{2,0})}{8\Phi_{1,2}^3} y_2^2$$

gegeben. Aufgrund des charakteristischen Knicks, den eine semikubische Parabel besitzt, nennen wir diese Singularität *Spitze*. Die quantitative Auswertung der Bildeigenschaften gelingt auf die gleiche Art und Weise wie für die Falte, sie ist nur etwas mühsamer. [Schneider et al. 1992] führen sie durch. Wir wollen hier die Ergebnisse nur qualitativ schildern. Streicht die Quelle über die Spitze hinweg, so finden wir dann, wenn sie sich „innerhalb“ der Spitze befindet, drei Bilder, von denen „außerhalb“ eines verbleibt. Von den angesprochenen drei Bildern sind zwei auf derselben Seite der kritischen Linie, die daher gleiche Parität haben, und eines auf der anderen Seite mit entgegengesetzter Parität.

⁹ $\Phi_{1,2}$ darf wegen der Annahme $\nabla D \neq 0$ nicht verschwinden.

Der Betrag der Verstärkung dieses Bildes stimmt mit der Summe der beiden anderen Verstärkungsbeträge überein.

Da das einzelne Bild zu einer Quelle außerhalb der Spitze in einem keulenförmigen Bereich um diese ebenfalls hoch verstärkt wird, können wir an den Wirkungsquerschnitt (2.15) eine „Spitzenkorrektur“ anbringen

$$\begin{aligned} \sigma(\mu_p > \mu_{\min}) &= \sigma_f(\mu_p > \mu_{\min}) + \\ &+ \frac{8\sqrt{6}}{15\mu_{\min}^{5/2}} \sum_i \sqrt{\frac{|\text{tr } A_{|i}|}{|\mathbf{T}_{|i}| |(\mathbf{T}_{|i} \cdot \nabla)(A_{|i} \cdot \mathbf{T}_{|i})|}} \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die dabei auftretende Summation ist über alle vorhandenen Spitzen zu erstrecken. Die Herleitung dieser Beziehung ist ähnlich mühevoll wie die quantitative Auswertung der Bilder und deren Eigenschaften. Sie wird in [Schneider, Weiß 1992] durchgeführt.

2.3.4 Katastrophen höherer Ordnung

Ist der Rang von A weiterhin eins, aber die Bedingung $(\mathbf{T} \cdot \nabla)(A \cdot \mathbf{T}) \neq 0$ verletzt, so erhalten wir die nächste der sogenannten *Kuspoiden*, den *Schwalbenschwanz*. Dieser Typ von Singularität ist uns schon in der Falte und der Spitze begegnet. $\nabla D = 0$ führt zu der *Lippen-* und der *Spitze-an-Spitze-*Katastrophe, $A = 0$ zu den *Nabeln*.

Kapitel 3

Das kosmologische Modell

Unser Weltbild entwickelte sich im Laufe der Geschichte immer mehr von den ursprünglich geozentrischen Vorstellungen weg und hin zu der Annahme, daß die Position eines erdgebundenen Betrachters in keiner Weise ausgezeichnet ist. Er würde, an eine beliebige Position des Universums gebracht, die selben Beobachtungen bezüglich der durchschnittlichen Eigenschaften der ihn umgebenden Materie machen. Wir sprechen daher von der *Homogenität* des Kosmos. Nehmen wir noch dessen *Isotropie* an, so erhalten wir mit Hilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie ein Weltmodell, das wir im Abschnitt 3.1 näher untersuchen werden. Diese Annahmen sind gelegentlich unter dem Begriff *kopernikanisches* oder *kosmologisches Prinzip* zusammengefaßt.

Es ist klar, daß die Homogenität und die Isotropie nur gelten können, wenn wir über die Materiedichte im Universum „auf geeignete Art und Weise“ mitteln. Aus Beobachtungen wissen wir, daß diese Bedingungen für strahlende Materie sogar noch auf Skalen von ungefähr 50Mpc (der typischen Skala von Superhaufen) sehr unzureichend erfüllt sind. Die Beobachtungen widersprechen aber nur vordergründig den Annahmen über die Struktur des Kosmos, da wir aus der Bewegung von Galaxien und deren Haufen schließen können, daß ein nicht unwesentlicher Teil der Materie „dunkel“ ist, sich also nicht durch Strahlung verrät. Über die Verteilung dieser Materie ist nur sehr wenig bekannt, aber eine Vermutung ist, daß sie sehr viel „glatter“ als die sichtbare Materie verteilt ist. Ein Argument für die glatte und isotrope Verteilung der dunklen Materie ist die gute Richtungsunabhängigkeit der kosmologischen 2.7K-Hintergrundstrahlung¹, von der weitestgehend geglaubt wird, daß sie ein Überrest des Urknalls ist. Extreme Materieanisotropien würden sich wahrscheinlich deutlicher auf die Strahlung übertragen. Damit können wir hoffen, daß die Homogenität und die Isotropie auf wesentlich kleineren Skalen als die der Superhaufen annähernd erfüllt ist.

¹Da diese Strahlung das Spektrum eines schwarzen Körpers hat, können Anisotropien durch Temperaturschwankungen ausgedrückt werden. $\frac{\Delta T}{T}$ liegt laut [Smoot et al. 1991] unterhalb von ungefähr $5 \cdot 10^{-6}$ auf einem Winkelbereich von 6° .

Nehmen wir aber an, daß das Universum homogen ist, so entziehen wir damit der Gravitationslinsentheorie die Grundlage. Jedoch existieren keine inhomogenen Lösungen der Einstein-Gleichungen, wenn wir von wenigen Ausnahmen, die alle für die Linsentheorie ungeeignet sind, absehen. Ein Beispiel für eine solche Ausnahme bildet das „Schweizer-Käse-Modell“ von [Kantowski 1968] und dazu verwandte Konstruktionen, deren Nachteile aber darin bestehen, daß die Störungen sowohl sphärisch symmetrisch sind als auch einen verglichen mit dem Mittel unterdichten Bereich enthalten. Somit sind wir gezwungen, einige „ad hoc“-Hypothesen einzuführen, die uns Linsenkandidaten in das homogene Weltmodell zurückbringen. Dies werden wir im Abschnitt 3.3 tun.

Schließlich stellt sich uns noch die Frage, wie dicht und von welcher Art die Materie ist, die unser Universum füllt. Sie kann durch die Beobachtung unserer unmittelbaren Umgebung geklärt werden, wenn wir das kosmologische Prinzip anerkennen. Diese ergeben (siehe zum Beispiel [Börner 1988] oder [Kolb, Turner 1990]) für Strahlung die Werte $1.6 \cdot 10^{-5} \lesssim \Omega_r \lesssim 6.4 \cdot 10^{-5}$ und für gewöhnliche Materie $0.1 \lesssim \Omega_d \lesssim 2$, also $\Omega_r < 10^{-3} \Omega_d$. Sie sind auf die sogenannte kritische Dichte bezogen, deren Bedeutung uns im Abschnitt 3.1 klar werden wird. Ein weiterer Parameter, den wir benötigen, ist die Hubble-Konstante, für die $H_0 = h_{50} \cdot 50 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ mit $1 \lesssim h_{50} \lesssim 2$ beobachtet worden ist. Wir werden $h_{50} = 1$ annehmen.

Mit diesen Vorstellungen ausgestattet werden wir nun die Konstruktion eines Modell-Universums angehen.

3.1 Friedmann-Lemaître-Universen

Die Forderungen nach einer homogenen und isotropen Metrik schränken die geometrische Struktur der Raumzeit in erheblichem Maße ein. Es ergibt sich die sogenannte *Robertson-Walker-Metrik*

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) d\sigma^2 \quad , \quad (3.1)$$

wobei

$$d\sigma^2 = \frac{d\mathbf{x}^2}{(1 + \frac{k}{4} \mathbf{x}^2)^2}$$

die Metrik des dreidimensionalen Riemannschen Raumes konstanter Krümmung $k \in \{-1, 0, 1\}$ bezeichnet. Darin nennen wir t die *kosmologische Zeit* und $R(t)$ der (positive) *Skalenfaktor*, die die Dimension einer Länge besitzt; wir werden in diesem Kapitel „geometrisierte“ Einheiten $c = G = 1$ verwenden. Eine ausführlichere Zusammenfassung der Eigenschaften von Friedmann-Lemaître-Universen liefert Kap. 4.4 von [Schneider et al. 1992]. Herleitungen der oben genannten Robertson-Walker-Metrik finden sich in jedem Lehrbuch zur Allgemeinen Relativitätstheorie: in mathematisch prägnanter Form zum Beispiel im Kap. 5 von [Wald 1984], mehr physikalisch motiviert in den Abhandlungen von [Misner et al. 1973] oder [Weinberg 1972, Kap. 14.2].

Wenden wir nun die Einstein-Gleichung $G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$ auf diese Metrik an, so ist der Energie-Impuls-Tensor durch den einer idealen Flüssigkeit gegeben. Wir erhalten aus ihr die *Friedmann-Gleichung*²

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{R^2}$$

und die *Adiabatengleichung*

$$(\rho R^3)' + p(R^3)' = 0 \quad .$$

Darin bezeichnen ρ die Dichte der Materie und p den Druck der Flüssigkeit, gemessen im System eines mit der Flüssigkeit mitbewegten Beobachters. Der Punkt steht für die Ableitung nach der Zeit t . Modelle, die eine Metrik vom Robertson-Walker-Typ haben und außerdem diese beiden Gleichungen erfüllen, nennen wir *Friedmann-Lemaître-Universen*. Durch die schon angesprochenen Beobachtungen wird uns nahegelegt, das Modell-Universum mit druckfreier, „kalter“, d.h. nicht-relativistischer Materie, sogenanntem *Staub*, zu füllen. Diese Annahmen über die kosmische Flüssigkeit bestimmen zusammen mit der Friedmann- und der Adiabatengleichung die Metrik und die „heutige Zeit“ t_0 bis auf zwei Konstanten, nämlich die Dichte ρ_0 des Kosmos und dessen relative Ausdehnungsgeschwindigkeit, die sogenannte *Hubble-Konstante* $H_0 := (\frac{\dot{R}}{R})_0$, zum „heutigen“ Zeitpunkt.

Den Beobachtungen angepaßte Friedmann-Lemaître-Universen dehnen sich aus—der Skalenfaktor $R(t)$ wird mit zunehmender kosmischer Zeit t größer. Dies führt zu dem Effekt, daß ein bei t ausgesandtes Lichtsignal dem Beobachter zum Zeitpunkt $t_0 > t$ um den Betrag $z := \lambda_0/\lambda - 1$ rotverschoben erscheint. Darin bezeichnet λ die Wellenlänge eines Lichtstrahls bei seiner Emission und λ_0 die des selben Strahls bei seiner Absorption. z heißt deshalb auch *Rotverschiebung*. Im Fall von Friedmann-Lemaître-Universen erhalten wir

$$z = \frac{R_0}{R(t)} - 1 \quad .$$

Größen mit dem Index 0 sollen sich immer auf die „Jetzt“-Zeit t_0 beziehen.

Die Friedmann-Gleichung liest sich dann

$$\dot{R} = R_0 H_0 \sqrt{1 + \Omega z} \quad , \quad (3.2)$$

die Adiabatengleichung, die im Staub-Universum die Erhaltung der Masse beschreibt, lautet

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \rho_0 (1 + z)^3 \quad . \quad (3.3)$$

Dabei haben wir die *kritische Dichte* $\rho_{\text{cr}} := \frac{3H_0^2}{8\pi}$, die den Dichtewert beschreibt, für den $k = 0$ gilt, und $\Omega := \frac{\rho_0}{\rho_{\text{cr}}}$ verwendet.

²Wir betrachten Raumzeiten mit verschwindender kosmologischer Konstante, $\Lambda = 0$.

3.2 Lichtausbreitung und Entfernungsmaße

Da in der Gravitationslinsentheorie die Ausbreitung von Licht in einem gegebenen Universum grundlegende Bedeutung hat, wollen wir jetzt die Strahlenoptik auf gekrümmte Raumzeiten verallgemeinern und sie dann als Grundlage für die Bildung von Abstandsbegriffen verwenden. Verständlicherweise können wir hier nur die grundlegenden Gedanken dazu besprechen. Ausführlich sind diese Vorstellungen im dritten und vierten Kapitel von [Schneider et al. 1992] erläutert.

3.2.1 Geometrische Optik im gekrümmten Raum

Die theoretische Grundlage zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene liefern die Maxwell-Gleichungen in gekrümmten Raumzeiten. Sie sind im allgemeinen nicht explizit lösbar. Häufig—wie eben auch in der Linsentheorie—sieht man sich dabei aber mit einem typischen Mehr-Skalen-Problem konfrontiert. Auf einer sehr kleinen Skala (der der Wellenlänge des Lichts) ändert sich die Phase S , auf einer mittleren, etliche Größenordnungen darüber liegenden, die Amplitude nahezu ebener elektromagnetischer Wellen. Enorm viel größer als diese beiden ist die größte Skala, nämlich die der Krümmung der Raumzeit. Diese Tatsache ermöglicht einen speziellen Ansatz für den Maxwell-Tensor, die sogenannte WKB-Näherung³, durch den wir viele Begriffe der „gewöhnlichen“ Strahlenoptik in die Allgemein-relativistische Situation übertragen können.

So ist für einen Beobachter mit Eigenzeit τ , Weltlinie $x^\alpha(\tau)$ und Vierergeschwindigkeit $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ die *Kreisfrequenz* $\omega := \frac{dS}{d\tau}$ weiterhin als die Änderung der Phase in der Eigenzeit und der *Wellenvektor* $k_\alpha := -S_{,\alpha}$ als (negativer) Gradient davon gegeben. Die Integralkurven an das Vektorfeld k^α nennen wir *Lichtstrahlen*. Der Wellenvektor ist ein Nullvektor, der parallel transportiert wird⁴: Lichtstrahlen sind also Nullgeodäten. Die *Eikonalgleichung*, die die Entwicklung der Phase beschreibt, liest sich nun $g^{\alpha\beta} S_{,\alpha} S_{,\beta} = 0$. Für die Amplitude und die Polarisation der elektromagnetischen Welle lassen sich ebenfalls Entwicklungsgleichungen ableiten, aber wir werden diese im folgenden nicht benötigen. Das *Fermatsche Prinzip* als Prinzip einer stationären Ankunftszeit gilt auch im gekrümmten Raum. Dies wird uns noch bei der relativistischen Herleitung des Ablenkwinkels von Nutzen sein.

3.2.2 Strahlenbündel und Entfernungsmaße

Nun wollen wir uns für die zeitliche Entwicklung des Querschnitts eines infinitesimal dünnen Bündels von Lichtstrahlen interessieren. Wird ein Beobachter im Raumzeit-Punkt

³WKB bezeichnet die Initialen der Physiker Wentzel, Kramers und Brillouin. Sie haben Lösungen der Schrödinger-Gleichung auf ähnliche Art approximiert.

⁴Dies rechtfertigt die in der Allgemeinen Relativitätstheorie übliche Bezeichnung „Lichtkegel“ für die Hyperfläche, die von den Nullgeodäten durch ein Ereignis aufgespannt wird.

P von einem Lichtbündel getroffen, so bestimmt das gleichzeitige Eintreffen der Strahlen bezüglich dieses Betrachters zusammen mit den Punkten gleicher Phase in dem Bündel eine Fläche in dessen dreidimensionalem Raum, die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung des Lichtbündels steht. Diese Eigenschaft sowie Größe und Form des Strahlquerschnitts sind für alle Beobachter in P gleich (unabhängig von deren Vierergeschwindigkeit). Für die Entwicklung dieser „Scheibchen“ lassen sich Gleichungen ableiten, die unter dem Namen „optische Skalargleichungen“ bekannt sind. Daraus wiederum oder durch direkte Differentiation gewinnen wir die *Fokussgleichung*

$$\frac{d^2}{dv^2}\sqrt{A} = -(|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta)\sqrt{A} \quad , \quad (3.4)$$

wobei A den Flächeninhalt und $|\sigma|^2 := \frac{1}{2}k_{\alpha;\beta}k^{\alpha;\beta} - \frac{1}{4}(k^\alpha{}_{;\alpha})^2$ das Betragsquadrat der *Scherung* eines Flächenstücks darstellen, während $k^\alpha := \frac{dx^\alpha}{dv}$ den affinen Parameter v definiert. $\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta$ verursacht eine Fokussierung des Lichtbündels und heißt dementsprechend *Ricci-Fokussierung*. Diese Gleichung wird uns im Abschnitt 3.3 als Grundlage für die Lichtausbreitung in inhomogenen Universen dienen. Zunächst aber hilft sie uns, physikalisch beobachtbare Abstands begriffe zu definieren. Es ist naheliegend, daß sich diese Begriffsbildung in gekrümmten Räumen schwieriger als im gewohnten flachen Raum gestalten wird.

Am zweckmäßigsten ist es, Abstände an die Ausbreitung von Licht zu knüpfen. Dazu werden wir Lichtbündel verwenden, die entweder bei der Quelle oder im Beobachter ihren Ursprung haben und die das Sende- mit dem Empfangsereignis verbinden. Im ersteren Fall setzen wir das Raumwinkelement $d\Omega_S$, in das das Lichtbündel ausgesandt wird, in Relation zum Flächenelement⁵ dA_O , das es beim Empfang einnimmt:

$$\Delta(u_S^\alpha, O) := \sqrt{\frac{dA_O}{d\Omega_S}} \quad . \quad (3.5)$$

u_S^α bezeichnet darin die Vierergeschwindigkeit der Quelle, von der dieser Abstand abhängt. Aus Gründen, die wir hier nicht diskutieren wollen, heißt er (*rotverschiebungskorrigierte Leuchtkraftentfernung*). Durch Vertauschen der Rollen von Quelle und Beobachter erhalten wir die Definition eines zweiten Abstandes

$$D(u_O^\alpha, S) := \sqrt{\frac{dA_S}{d\Omega_O}} \quad , \quad (3.6)$$

den wir unmittelbar einsichtig *Winkelentfernung* nennen wollen. Bei genauerer Analyse der Definitionen würden wir feststellen, daß diese nicht wie im Fall einer statischen Raumzeit gleich, sondern durch die *Reziprozitätsbeziehung* $\Delta = (1 + z)D$ aneinander

⁵Dabei handelt es sich selbstverständlich um das oben angesprochene invariante Flächenelement.

gebunden sind, wobei $z = \frac{\omega_S}{\omega_0} - 1$ die schon angesprochene Rotverschiebung bezeichnet. Die Krümmung der Raumzeit ermöglicht auch den im flachen Fall ausgeschlossenen Effekt, daß das Flächenelement verschwindenden Inhalt hat, was auch die eben definierten Entfernungen verschwinden läßt. Ein solches Ereignis heißt ein zum Ursprung des Lichtbündels *konjugierter Punkt*. Da wir uns in der Gravitationslinsentheorie vornehmlich mit der Ausdehnung von Objekten aus der Sicht des Beobachters befassen, wird der Winkelentfernung darin eine besondere Bedeutung zukommen.

Ein anderes Entfernungsmaß, das ebenfalls an die Ausbreitung von Licht geknüpft ist, ist die sogenannte *Eigenentfernung* dD_{prop} . Sie beschreibt die vom Lichtstrahl tatsächlich zurückgelegte Weglänge, die sich zwar auch nicht unmittelbar beobachten läßt, aber die in der Darstellung von Volumenelementen eine Rolle spielt.

In einem Friedmann-Lemaître-Universum läßt sich diese leicht auf die Rotverschiebung beziehen, denn es gilt

$$dD_{\text{prop}} = -dt = -\frac{dR}{\dot{R}} = \frac{dz}{H_0(1+z)^2\sqrt{1+\Omega z}} \quad .$$

Wegen der Definition des affinen Parameters v verstehen wir ebenso leicht dessen Beziehung zur Rotverschiebung:

$$dv = -\frac{1}{\omega}dD_{\text{prop}} = -\frac{dz}{\omega_0 H_0(1+z)^3\sqrt{1+\Omega z}} \quad . \quad (3.7)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die Winkel- und die Leuchtkraftentfernung werden wir in etwas allgemeinerem Zusammenhang im nächsten Abschnitt diskutieren.

3.3 Das Modell-Universum

Da eine der Gravitationslinsentheorie angemessene, strenge Lösung der Einstein-Gleichung nicht bekannt ist, sind wir genötigt, eine Beschreibung des Universums zu finden, von der wir die Hoffnung haben, daß sie die tatsächliche Situation gut nähert, die aber auf den bekannten Begriff des Friedmann-Lemaître-Universums zurückgreift. Wir denken uns dazu einen gewissen Anteil $1 - \tilde{\alpha} \in [0, 1]$ des von uns betrachteten Staubes im Friedmann-Lemaître-Universum zu „Materiekumpen“ zusammengezogen, wodurch wir ein inhomogenes Universum modellieren. $\tilde{\alpha}$ nennen wir anschaulich *Glattheit*. Die zentrale Annahme ist nun, daß trotz dieser Veränderung des Kosmos auf kleinen Skalen (zum Beispiel denen von Galaxien, nämlich einigen hundert Kiloparsec) die globale Entwicklung weiterhin durch ein „Im-Mittel“-Friedmann-Lemaître-Universum beschrieben werden kann. Unter diesem Begriff wollen wir verstehen, daß „globale“ Größen in unserem Universum wie zum Beispiel die durch eine Rotverschiebung gegebene Kugelfläche um einen Beobachter mit Hilfe der Friedmann-Lemaître-Metrik beschrieben, daß aber die

Lichtausbreitung von der lokal vorhandenen Materie $\tilde{\alpha}\rho$ bestimmt wird. Eine Idee, diese möglichst plausibel zu beschreiben, liefert der Ansatz von Dyer und Roeder.

Ausgangspunkt dafür ist die Fokusgleichung (3.4). Darin können wir unter Verwendung der Einsteinschen Feldgleichung und der Lichtartigkeit von k^α die Ricci-Fokussierung durch den Term $4\pi T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta$ ersetzen. Haben wir nun ein staubgefülltes Friedmann-Lemaître-Universum, so ist dieser Ausdruck in einem mit dem Staub mitbewegten Koordinatensystem gegeben durch $4\pi\tilde{\alpha}\rho_0\omega_0^2(1+z)^5 = \frac{3}{2}H_0^2\Omega\tilde{\alpha}\omega_0^2(1+z)^5$. Außerdem wollen wir uns auf Strahlen beschränken, die weit entfernt von Materiekumpen verlaufen: wir werden also den Scherungsterm in der Fokusgleichung vernachlässigen. Da wir uns in einem „Im-Mittel“-Friedmann-Lemaître-Universum aufhalten wollen, können wir auch die darin gültige Beziehung zwischen dem affinen Parameter längs Lichtstrahlen und der Rotverschiebung, Gl. (3.7), verwenden. Wir erhalten dann aus der Fokusgleichung die *Dyer-Roeder-Gleichung*

$$(1+z)(1+\Omega z)\frac{d^2D}{dz^2} + \left(\frac{7}{2}\Omega z + \frac{1}{2}\Omega + 3\right)\frac{dD}{dz} + \frac{3}{2}\tilde{\alpha}\Omega D = 0 \quad ,$$

wobei wir die Proportionalität zwischen \sqrt{A} und der Winkelentfernung D ausgenutzt haben. Bequemerweise beziehen wir D auf die Hubble-Länge H_0^{-1} , so daß wir ein dimensionsloses Abstandmaß $r := H_0 D$ erhalten. Jetzt fehlen uns noch die Anfangswerte der Differentialgleichung, für die wir $r(z_1, z_1) = 0$ und $\frac{d}{dz}r(z_1, z)|_{z=z_1} = \frac{\text{sgn}(z-z_1)}{(1+z_1)^2\sqrt{1+\Omega z_1}}$ wählen. Der physikalische Gehalt der ersten Anfangsbedingung ist offensichtlich, die zweite bezeichnet das Hubble-Gesetz eines Beobachters mit Rotverschiebung z_1 . Die Lösung dieser Gleichung wird in Abschnitt 4.5.3 von [Schneider et al. 1992] diskutiert. Dabei ist außerdem zu erkennen, daß die Reziprozitätsbeziehung, die wir im vorangegangenen Abschnitt zitiert haben, ebenfalls gültig bleibt. Für die Eigenentfernung gilt gemäß unserer Modellannahmen die Friedmann-Lemaître-Beziehung.

3.4 Gravitationslinsen im Modell-Universum

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch darstellen, wie die einfachen geometrischen Vorstellungen einer Gravitationslinse aus Kap. 2 in diesem kosmologischen Zusammenhang zu verstehen sind. Dazu erinnern wir uns der dort gemachten Dreiteilung des Lichtweges: die beiden äußeren Teile, die den größten Teil davon ausmachen, beschreiben die ungestörte Ausbreitung des Strahles im Kosmos, im mittleren beeinflusst die Linse den Lichtweg.

Zunächst werden wir uns dem mittleren Teil widmen. Dazu nehmen wir an, daß die Abweichung von der flachen Raumzeit im wesentlichen von der vorhandenen Linse verursacht wird, daß sie aber sehr geringfügig ist⁶. Diese denken wir uns als ein Gebilde von

⁶Daher sind Linsen, die in ihrer Umgebung ein starkes Gravitationsfeld verursachen, wie zum Beispiel

idealer Flüssigkeit, deren Geschwindigkeit bezüglich des mit dem sonstigen kosmischen Staub bewegten Koordinatensystems vernachlässigbar ist. Dann nähern wir die Raumzeit lokal durch die Post-Newton-Metrik

$$ds^2 = (1 + 2U) dt^2 - (1 - 2U) d\mathbf{x}^2 \quad ,$$

in der

$$U(\mathbf{x}) = - \int \frac{\rho(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|} d^3y \ll 1$$

das Newtonsche Potential ist. Die Zeitabhängigkeit von U und auch die Retardierung der Dichte im Integral entfallen, wenn—was wir weiterhin annehmen—die Linse stationär in einem viel größeren Zeitraum ist als der, den der Lichtstrahl zum Passieren der Linse benötigt. Für eine Punktmasse M im Ursprung ist $U = -M|\mathbf{x}|^{-1}$ und die zugehörige Situation mit etlichen Definitionen ist in Abb. 3.1 dargestellt. Starten wir ein Lichtsignal zum Zeitpunkt $t = 0$ in A , so kommt es bei $t = \int_A^B (1 - 2U) dl$ im Punkt B an. Es verspätet sich also aufgrund des Gravitationspotentials um $-2 \int_A^B U dl$ im Vergleich zu einem Lichtstrahl, der sich ohne den Einfluß der störenden Masse ausbreitet. Für die Punktmasse ist, sofern wir die Ablenkung des Lichtstrahls vernachlässigen können,

$$\begin{aligned} -2 \int U dl &= 4M \int_0^d \frac{dl}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} = \\ &= 4M \ln \left(\frac{d + \sqrt{|\xi|^2 + d^2}}{|\xi|} \right) \quad . \end{aligned}$$

Erkennen wir noch, daß das spätere Fermat-Potential nur bis auf eine additive Konstante bestimmt zu sein braucht und daß zur ausreichenden Berücksichtigung des Gravitationspotentials $d \gg |\xi|$ gelten muß, so ist die *gravitative Zeitverzögerung* gegeben durch $\delta t_{\text{grav}} = -4M \ln \left(\frac{1}{\xi_0} |\xi| \right)$. ξ_0 ist eine willkürliche Längeneinheit. Aufgrund der Linearität des Newtonschen Potentials bezüglich der Dichte ρ ist sie für eine ausgedehnte Materieverteilung dann

$$\delta t_{\text{grav}} = -4 \int \Sigma(\xi') \ln \frac{|\xi - \xi'|}{\xi_0} d^2 \xi' \quad . \quad (3.8)$$

Darin haben wir noch die Tatsache verwendet, daß wir die Materieverteilung ρ in eine Ebene senkrecht zum Lichtstrahl projizieren können, da die Lage der Materie parallel zum Strahl für die Zeitverzögerung keine Rolle spielt. So wird aus ρ eine Flächenmassendichte Σ .

Jetzt betrachten wir die beiden Teilstrecken, in denen sich der Lichtstrahl „ungestört“ entwickeln kann. Dazu müssen wir zunächst die Begriffe aus Abb. 2.1 in einen Zusammenhang zu unserem Modell-Universum bringen. Die Projektion eines willkürlich gewählten

Neutronensterne oder schwarze Löcher, von dieser Betrachtung ausgeschlossen.

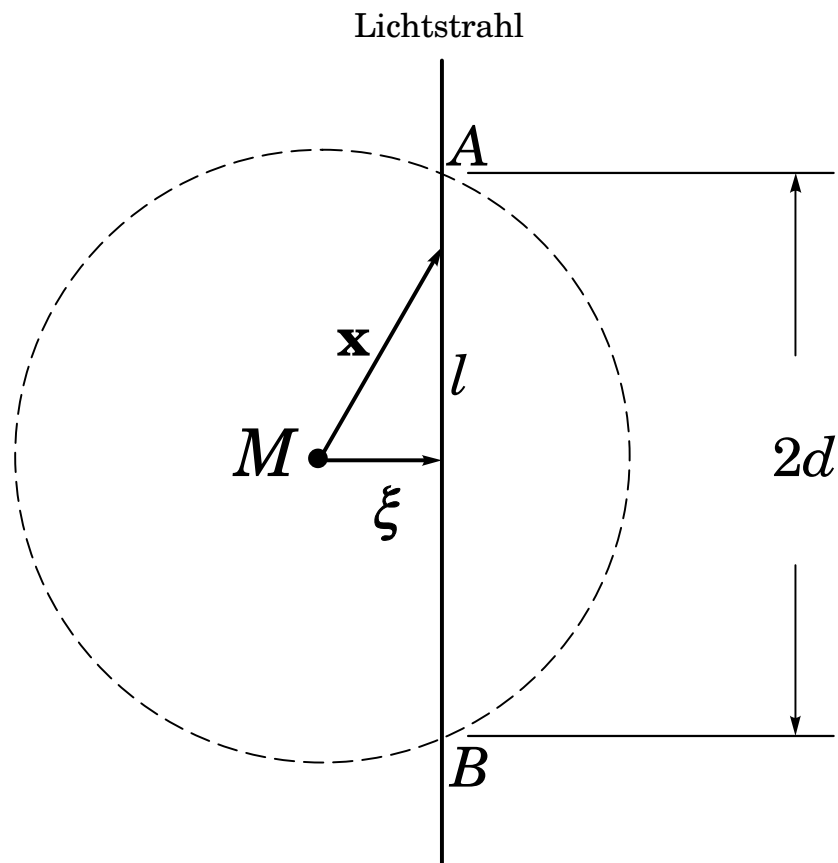


Abbildung 3.1: Der gravitative Zeitverlust. Die Kreislinie markiert den Einflußbereich des Gravitationspotentials der Punktmasse M . Darunter wollen wir den Bereich verstehen, der den für unsere Näherung maßgeblichen Teil der Gravitationswirkung abdeckt. Die Punkte A und B beschreiben den Eintritt des Lichtstrahls in diesen Bereich und dessen Austritt. Der tatsächliche Lichtstrahl weicht aufgrund der Masse M aber auf einer für die Änderung des Gravitationspotentials typischen Skala nur sehr geringfügig von der „geradlinigen“ Ausbreitung ab. Wir werden diese Abweichung deshalb vernachlässigen. ξ steht senkrecht auf dem Lichtstrahl und heißt Stoßparameter. Um das Gravitationspotential ausreichend zu berücksichtigen, muß $d \gg |\xi|$ gelten.

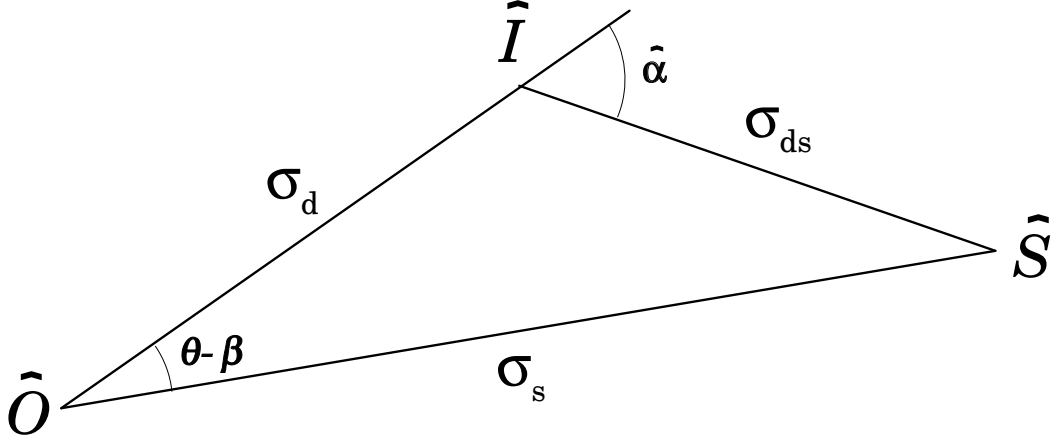


Abbildung 3.2: Der geometrische Zeitverlust. Die Verbindungslinie $\hat{S}\hat{I}\hat{O}$ bezeichnet einen kinematisch möglichen Lichtstrahl, $\hat{S}\hat{O}$ wäre dessen Verlauf ohne Linse. Die Darstellung stellt die Ebene innerhalb des 3-Raumes Σ_0 dar, die von diesen projizierten Strahlen aufgespannt wird. σ bezeichnet daher gewohnte Koordinatenabstände im flachen Raum. θ ist der Winkel zur optischen Achse, unter dem der Beobachter das Bild der Quelle sieht, und bei β steht die Quelle tatsächlich.

Lichtstrahl in den mitbewegten 3-Raum Σ_k konstanter Krümmung $k \in \{-1, 0, 1\}$ bildet die optische Achse. Entsprechend dazu senkrechte Flächenstücke stellen die Linsen- und die Quellenebene dar. Als mögliche Lichtstrahlen gelten Nullgeodäten der Robertson-Walker-Metrik von der Quelle zur Linsenebene—dem ersten Teil des Weges—und von dort zum Beobachter. Da jedoch ein derartiger, in der Linsenebene abgelenkter Lichtweg länger als die direkte Verbindung Quelle-Betrachter ist, entsteht eine zusätzliche *geometrische Zeitverzögerung*. Diese ergibt sich aus $dt = R(t) d\sigma$, Gl. (3.1) mit $ds = 0$, wenn wir berücksichtigen, daß das Universum im Zeitintervall zwischen dem Eintreffen des „gedachten“ Strahls $\hat{S}\hat{O}$ und dem des „tatsächlichen“ Strahls $\hat{S}\hat{I}\hat{O}$ keine merkliche Ausdehnung erfährt, zu

$$\delta t_{\text{geom}} = R_0(\sigma_{ds} + \sigma_d - \sigma_s) \quad .$$

Die Längen σ sind Koordinatenentfernungen im 3-Raum Σ_k und der Abb. 3.2 entsprechend gewählt. Für den flachen 3-Raum Σ_0 gilt aufgrund des Kosinussatzes $\sigma_{ds} + \sigma_d - \sigma_s = \frac{\sigma_{ds}\sigma_d}{2\sigma_s} \hat{\alpha}^2$. Zusammen mit $\sigma_{ds} + \sigma_d \simeq \sigma_s$ und dem Sinussatz $\hat{\alpha} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{ds}}(\theta - \beta)$ ergibt sich für

den Zeitverlust

$$\frac{\delta t_{\text{geom}}}{R_0} = \frac{\sigma_d \sigma_s}{2\sigma_{\text{ds}}} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 \quad .$$

Darin haben wir vorausgesetzt, daß $\hat{\alpha}$ ein sehr kleiner Winkel ist. Aufgrund der Definition der Winkelentfernung $D_d = R_d \sigma_d$, $D_s = R_s \sigma_s$ und $D_{\text{ds}} = R_s \sigma_{\text{ds}}$, sowie wegen $\frac{R_0}{R_d} = 1 + z_d$ erhalten wir schließlich

$$\delta t_{\text{geom}} = (1 + z_d) \frac{D_d D_s}{2D_{\text{ds}}} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 \quad . \quad (3.9)$$

Die selbe Beziehung erhalten wir für die beiden anderen Krümmungen k , wenn wir hyperbolische oder sphärische Trigonometrie benutzen.

Nun ergibt sich der gesamte Zeitverlust, den ein Strahl durch das Linsenereignis erleidet, zu

$$\delta t = \delta t_{\text{geom}} + (1 + z_d) \delta t_{\text{grav}} \quad ,$$

da die gravitative Zeitverzögerung noch an den Ort des Beobachters transportiert werden muß. Setzen wir $\boldsymbol{\xi} = D_d \boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\eta} = D_s \boldsymbol{\beta}$ und $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \delta t_{\text{grav}}$, so ergibt sich aus dem Fermatschen Prinzip $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \delta t = 0$ die dimensionsbehaftete Linsengleichung (2.1). Außerdem liefern uns diese Definitionen die Beziehung zwischen δt und dem Fermat-Potential $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$\delta t = (1 + z_d) \frac{D_s \xi_0^2}{D_d D_{\text{ds}}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad ,$$

die es uns bereits im Abschnitt 2.3 ermöglicht hat, den Laufzeitunterschied zwischen zwei Bildern zu ermitteln.

Abschließen werden wir diesen Abschnitt mit zwei ergänzenden Bemerkungen. Als Erstes können wir nun den Begriff „Kaustik“ aus der Linsentheorie mit dem Begriff „konjugierter Punkt“ der Strahlenoptik in gekrümmten Raumzeiten in Verbindung bringen. Projizieren wir nämlich alle konjugierten Punkte auf dem Vergangenheitslichtkegel des Beobachters wie vorhin die Lichtstrahlen in den mitbewegten 3-Raum Σ_k , so bildet die Schnittmenge dieser projizierten Punkte mit der Quellenebene die Kaustiken der Gravitationslinsentheorie. Die zweite Bemerkung betrifft die Herleitung der Linsengleichung in diesem Abschnitt. Da sich das Fermatsche Prinzip als Variationsprinzip im Fall der Pos-Newton-Metrik analog zu dem der klassischen Strahlenoptik schreiben läßt, wäre uns der Ablenkwinkel auch durch die Variation von Lichtwegen zugänglich. Diese Methode ist

aber technisch schwieriger. Sie findet sich im vierten Kapitel von [Schneider et al. 1992]. Das Ergebnis lautet

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = 4 \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d^2 \xi' \quad ,$$

in Übereinstimmung mit Gl. (2.2)—wobei wir hier geometrisierte Einheiten benutzt haben.

æ

Kapitel 4

Singuläre isotherme Linsenmodelle

In diesem und dem darauffolgenden Kapitel werden wir *isotherme Linsenmodelle* besprechen. Darunter wollen wir verstehen, daß die Flächenmassendichte Σ zumindest im äußeren Bereich der Linse umgekehrt proportional zu $|\xi|$ ist. Die Bezeichnung „isotherm“ für diese radiale Abhängigkeit werden wir im Abschnitt 4.1 klären. Dort wollen wir außerdem der Frage nachgehen, welche Galaxientypen wir mit diesem Modell nähern können. Im Rest des Kapitels werden wir zunächst die Linseneigenschaften von sogenannten singulären isothermen Modellen untersuchen. Sie besitzen, wie der Begriff „singulär“ andeuten soll, eine divergierende Flächenmassendichte im Linsenzentrum. Wir werden diese unphysikalische Eigenschaft im nächsten Kapitel entfernen. Dort werden wir leider auch erkennen müssen, daß diese Modelle analytisch viel schwieriger zu handhaben sind. Trotzdem wird es uns möglich sein, zumindest in einigen physikalisch relevanten Größen Vergleiche zwischen dem idealisierten, singulären und dem realistischeren, nichtsingulären Linsenmodell anzustellen.

Den rotationssymmetrischen Fall der singulären isothermen Sphäre, den wir im Abschnitt 4.2 diskutieren, werden wir auf elliptische Symmetrie verallgemeinern. Da die Handhabung der elliptischen Linsen ungleich schwieriger ist, werden wir davon die Multipolentwicklung im Abschnitt 4.3 und die exakte Lösung im Abschnitt 4.4 betrachten.

4.1 Modellierung von Galaxien

4.1.1 Elliptische Galaxien

Als *elliptische Galaxien* werden große Ansammlungen von überwiegend Population II-, also alten Sternen bezeichnet, deren Isophoten nahezu konzentrische Ellipsen am Himmel bilden. Sie zeigen in der Regel keine weitergehende Strukturierung und besitzen im allgemeinen nur eine geringfügige Rotation. Diese Galaxien werden nach der Elliptizität ihrer Isophoten klassifiziert und haben typischerweise ein Hauptachsenverhältnis zwi-

schen 0.3 und 1. Für die Oberflächenhelligkeit elliptischer Galaxien gibt es empirische Näherungsformeln. Da die Helligkeitsverteilung aber nicht unbedingt die Materieverteilung widerspiegeln muß, wollen wir uns für den Versuch, eine geeignete Dichteverteilung zu finden, theoretischen Überlegungen zu derartigen Galaxien zuwenden.

Dazu werden wir aus Gründen der Einfachheit vom rotationssymmetrischen Fall ausgehen. Betrachten wir die Galaxie als ideales Gas konstanter Temperatur T , in dem die Sterne, die alle die selbe Masse m_s besitzen sollen, die Gasatome bilden, so erhalten wir als Zustandsgleichung

$$p(R) = \frac{k_B T}{m_s} \rho(R) \quad .$$

R bezeichnet hier die Radialkoordinate in (dreidimensionalen) Kugelkoordinaten. p ist der Druck, ρ die Dichte des Gases und k_B die Boltzmann-Konstante. Diese kugelsymmetrische, selbst-gravitierende Anordnung soll sich außerdem im hydrostatischen Gleichgewicht befinden:

$$\frac{dp}{dR} = -\rho \frac{GM(R)}{R^2} = \frac{k_B T}{m_s} \frac{d\rho}{dR} \quad .$$

$M(R)$ ist die Gesamtmasse innerhalb von R . Bringen wir ρ und R^2 nach rechts und leiten diese Beziehung nach R ab, so erhalten wir

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d \ln \rho}{dR} \right) = -4\pi \frac{m_s G}{k_B T} R^2 \rho \quad ,$$

wenn wir noch $\frac{dM}{dR} = 4\pi R^2 \rho$ ausnutzen. Die Größe $k_B T / m_s$ besitzt die Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats und wir definieren $v^2 := k_B T / m_s$. [Binney, Tremaine 1987] zum Beispiel untersuchen die Statistik der Sterne innerhalb dieses Galaxienmodells und können damit v^2 physikalisch interpretieren. Es ist das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Sterne in einer Raumrichtung. Daher bezeichnen wir v als *Geschwindigkeitsdispersion* (längs der Sichtlinie). Eine analytisch darstellbare Lösung dieser Differentialgleichung ist durch

$$\rho(R) = \frac{v^2}{2\pi G} \frac{1}{R^2}$$

gegeben. Diese Lösung ist als *singuläre isotherme Sphäre* bekannt. Die projizierte Flächenmassendichte davon lautet

$$\Sigma(\xi) = \frac{v^2}{2G} \frac{1}{\xi} \quad ,$$

wobei $\xi = |\boldsymbol{\xi}|$ den Betrag des Vektors $\boldsymbol{\xi}$ bezeichnet. Dies entspricht genau der inversen Proportionalität, die wir im Linsenmodell der singulären isothermen Sphäre oder verkürzt

dem der *SIS-Linse* betrachten werden. Setzen wir den Skalenfaktor ξ_0 gleich $4\pi \frac{v^2}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s}$, so erhalten wir diejenige dimensionslose Flächenmassendichte

$$\kappa(r) = \frac{1}{2r}$$

mit $r := |\mathbf{x}|$, deren Linseneigenschaften wir im Abschnitt 4.2 untersuchen wollen. Außerdem motivieren unsere Modellvorstellungen die Bezeichnung „isotherm“ für diese radiale Abhängigkeit.

Dieses Galaxienmodell besitzt aber zwei Schwächen: Erstens divergiert ρ im Ursprung und zweitens ist die Gesamtmasse der Galaxie unendlich, denn es gilt $M(R) = \frac{2v^2}{G}R$. Das erste Problem verschwindet, wenn wir nicht divergierende Lösungen obiger Differentialgleichung betrachten. Da diese aber analytisch unzugänglich sind, werden wir für die Linsentheorie einen einfacheren Weg einschlagen. Wir wählen als Flächenmassendichte

$$\begin{aligned} \Sigma(\xi) &= \frac{\Sigma_0}{\sqrt{1 + \xi^2/\xi_c^2}} \\ \kappa(r) &= \frac{1}{2\sqrt{r^2 + r_c^2}} \quad , \end{aligned}$$

wobei $\xi = |\boldsymbol{\xi}| = \xi_0 |\mathbf{x}| = \xi_0 r$ mit $\xi_0 = 2 \frac{\Sigma_0}{\Sigma_{cr}} \xi_c$ gewählt wurde. Σ_0 ist die *zentrale Dichte* und ξ_c beziehungsweise r_c nennen wir *Kernradius*. Das zu dieser Flächenmassendichte gehörige Linsenmodell soll *nichtsinguläres isothermes Ellipsoid* oder verkürzt *NIE-Linse* heißen. Interpretieren wir v als die Geschwindigkeitsdispersion im äußeren, isothermen ($\kappa \propto \frac{1}{r}$) Bereich der Galaxie, so können wir mit der Beziehung $\Sigma_0 \xi_c = \frac{v^2}{2G}$ das Linsenmodell auch mit v statt mit Σ_0 parametrisieren. Die Längenskala ξ_0 für den nichtsingulären Fall fällt dann mit der der singulären Linse zusammen. Die Linseneigenschaften dieser Materieverteilung werden wir im fünften Kapitel untersuchen. Das zweite der oben genannten Probleme umgehen wir später dadurch, daß wir κ ab einer gewissen Iso-Dichte-Linie gleich null setzen.

Bis jetzt haben wir uns auf den rotationssymmetrischen Fall beschränkt. Rotationssymmetrische Gravitationslinsen besitzen aber qualitativ andere Eigenschaften als Linsen mit elliptischer Symmetrie. Daher verallgemeinern wir die eben aufgestellten Flächenmassendichten zu welchen mit elliptischen Iso-Dichte-Linien. Wir erhalten für die Dichte des *singulären isothermen Ellipsoids* oder kurz der *SIE-Linse*, wie wir die „elliptische“ Verallgemeinerung der singulären isothermen Sphäre nennen wollen, das Ergebnis

$$\begin{aligned} \Sigma(\zeta) &= \frac{\sqrt{f} v^2}{2G} \frac{1}{\zeta} \\ \text{mit } \zeta &:= \sqrt{\xi_1^2 + f^2 \xi_2^2} \quad . \end{aligned}$$

ζ bezeichnet also die kleinen Halbachsen von Ellipsen konstanter Dichte. $0 < f \leq 1$ ist das Verhältnis von kleiner zu großer Halbachse dieser Ellipsen—der Fall $f = 1$ entspricht dann offensichtlich der Sphäre. Abb. 4.1 zeigt Iso-Dichte-Linien mit $f = 1$ und mit $f = \frac{2}{3}$. Wir werden f *Elliptizität* nennen. Dem obigen Ergebnis für die dimensionsbehaftete Flächenmassendichte liegt die Überlegung zugrunde, daß Flächen, die von Linien einer gegebenen Flächenmassendichte umschlossen sind, unabhängig von deren Elliptizität den selben Flächeninhalt haben sollen. Durch den Vergleich der Flächenmassendichte des Ellipsoids mit der Sphäre erhalten wir für diese Linien die Bedingung $\zeta = \sqrt{f}\xi$. Aus der genannten Überlegung können wir folgern, daß die Gesamtmasse innerhalb solcher Iso-Dichte-Linien ebenso unabhängig von der Elliptizität ist. Diese Tatsache wird besonders im sechsten Kapitel Bedeutung erlangen. Um die Folgerung zu bestätigen, führen wir nichtorthogonale, elliptische Koordinaten ζ und θ mit $\boldsymbol{\xi} =: (\zeta \cos \theta, \frac{\zeta}{f} \sin \theta)$ in die Linsenebene ein. Für ein Flächenelement $d^2\xi$ gilt in diesen Koordinaten $d^2\xi = |\det \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\zeta, \theta)}| d\zeta d\theta = \frac{\zeta}{f} d\zeta d\theta$. Daraus erhalten wir für die Masse innerhalb einer Linie fester Dichte, also mit kleiner Halbachse $\sqrt{f}\xi$, den Wert

$$M = \frac{2\pi}{f} \int_0^{\sqrt{f}\xi} \Sigma(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{\pi v^2}{G} \xi \quad ,$$

der wirklich unabhängig von der Elliptizität ist. Um dem singulären isothermen Ellipsoid eine dimensionslose Flächenmassendichte zuzuordnen, verwenden wir den Skalenfaktor $\zeta_0 = \sqrt{f}\xi_0 = 4\pi \frac{\sqrt{fv^2}}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s}$, der die Verallgemeinerung des Skalenfaktors $\xi_0 = \zeta_0 (f = 1)$ für die rotationssymmetrischen Linsen darstellt. Dann erhalten wir mit $b := \frac{\zeta}{\zeta_0}$

$$\kappa(b) = \frac{1}{2b} = \frac{1}{2r\Delta(\phi)} \quad ,$$

wobei wir für die letzte Gleichung Polarkoordinaten verwendet haben. Es gilt $b^2 = x_1^2 + f^2 x_2^2 = r\Delta(\phi)$ mit der Abkürzung $\Delta(\phi) := \sqrt{\cos \phi + f^2 \sin \phi}$. Analog zur dimensionsbehafteten Situation können wir durch $\mathbf{x} =: (b \cos \theta, \frac{b}{f} \sin \theta)$ elliptische Koordinaten definieren. Wir werden sie besonders im Zusammenhang mit der komplexen Darstellung der Linsentheorie des Anhangs C benutzen.

Die Verallgemeinerung der nichtsingulären isothermen Sphäre zum *nichtsingulären isothermen Ellipsoid* oder kurz zur *NIE-Linse* können wir leicht bewerkstelligen. Wir müssen nur die Größen ξ und r durch die Entsprechungen ζ und b ersetzen. Als Flächenmassendichte erhalten wir also

$$\begin{aligned} \Sigma(\zeta) &= \frac{\Sigma_0}{\sqrt{1 + \zeta^2/\zeta_c^2}} \\ \kappa(b) &= \frac{1}{2\sqrt{b^2 + b_c^2}} \quad , \end{aligned}$$

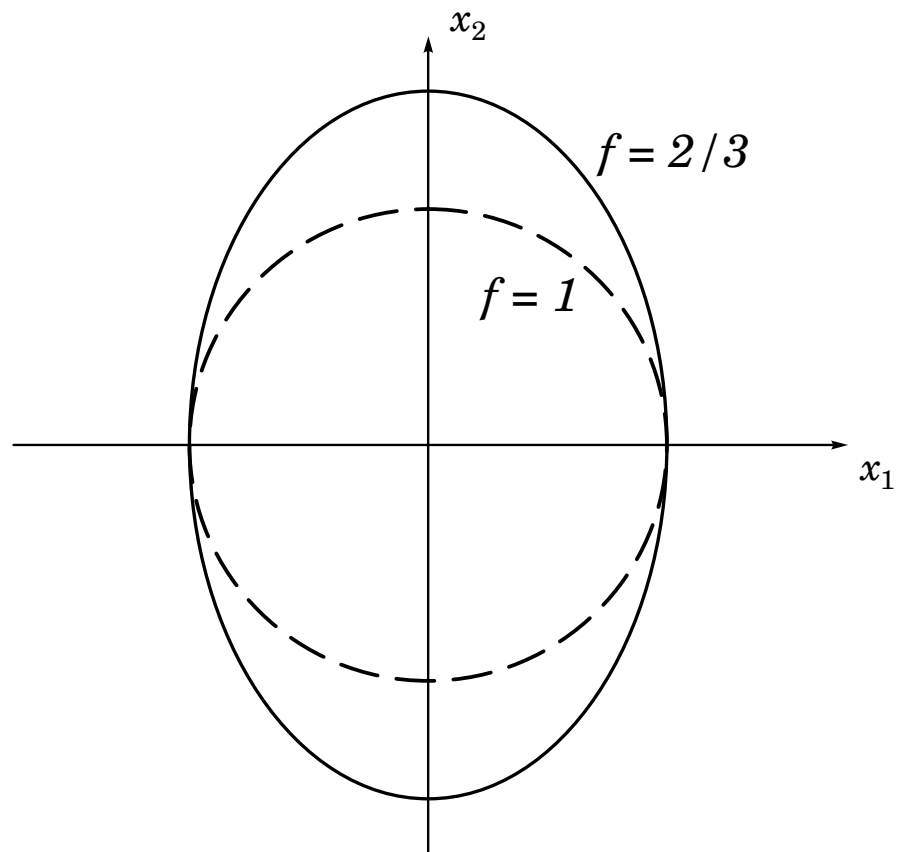


Abbildung 4.1: Iso-Dichte-Linien für den Fall der Sphäre ($f = 1$) und für ein Ellipsoid ($f = \frac{2}{3}$).

wobei wir entsprechend zur Sphäre $\zeta_0 = 2 \frac{\Sigma_0}{\Sigma_{cr}} \zeta_c$ gewählt haben. ζ_c bzw. b_c sollen auch im elliptischen Fall Kernradius heißen. Um die dimensionbehaftete Flächenmassendichte mit der Geschwindigkeitsdispersion v statt der zentralen Dichte Σ_0 zu parametrisieren, können wir die Beziehung $\Sigma_0 \zeta_c = \frac{\sqrt{f} v^2}{2G}$ verwenden. Setzen wir $\zeta_c = \sqrt{f} \xi_c$, so ist auch in diesem Fall die „Masse“ der Linse unabhängig von der Elliptizität.

4.1.2 Spiralgalaxien

Bei *Spiralgalaxien* befindet sich nahezu die gesamte leuchtende Materie innerhalb einer dünnen Scheibe. Diese Materie weist außerdem mehr oder weniger deutlich Spiralstruktur auf, was diesem Galaxientyp auch den Namen gegeben hat. Messungen der Rotationsgeschwindigkeit innerhalb der Galaxie mit Hilfe von Dopplerverbreiterungen oder -verschiebungen ergeben mit Ausnahme des Zentrums einen konstanten Wert. Dies bedeutet, daß neben der sichtbaren Materie noch ein wesentlicher Teil an sogenannter dunkler Materie vorhanden sein muß.

Es ist nicht geklärt, wie diese Materie im Vergleich zur sichtbaren angeordnet ist. Sie könnte die leuchtende Masse in einem dunklen, nahezu sphärischen Halo umgeben. Eine isotherme ($\rho(R) \propto \frac{1}{R^2}$) radiale Abhängigkeit würde die „flachen Rotationskurven“ der Spiralgalaxien erklären. Die selben Überlegungen wie zur elliptischen Galaxie führen uns dann zum isothermen Linsenmodell. Allerdings ist in diesem Fall die Elliptizität der Materieverteilung nicht mehr an die beobachtbare Lichtverteilung geknüpft. Jedoch kommt die Idee, daß Spiralgalaxien in einen sphärischen Halo aus dunkler Materie eingebettet sind, nur aus dynamischen Überlegungen zustande. Ebenso wäre denkbar, daß ein Großteil der dunklen Materie an die leuchtende Scheibe gebunden ist.

Die analytische Behandlung scheibenförmiger (und rotationssymmetrischer) Materieverteilungen ist relativ mühsam, aber möglich. [Binney, Tremaine 1987] zum Beispiel führen sie durch. Setzen wir die Flächenmassendichte innerhalb der Scheibe gleich $\Sigma(\rho) = \frac{\Sigma_1 \rho_1}{\rho}$, so ergibt sich dafür die gemessene konstante Keplergeschwindigkeit $v_k^2 = 2\pi G \Sigma_1 \rho_1$. Dieses Modell ist unter dem Namen *Mestelsche Scheibe* bekannt. Wählen wir als Skalenfaktor $\xi_0 = 2 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_{cr}} \rho_1$, so ergibt sich wiederum die dimensionslose Flächenmassendichte der singulären isothermen Sphäre. Im allgemeinen jedoch werden die Beobachtungsrichtung und die Symmetrieachse der scheibenförmigen Galaxie einen nichtverschwindenden Winkel einschließen, so daß der Projektionseffekt aus kreisförmigen Isodichtelinien Ellipsen macht. In diesem Fall erhalten wir also ein singuläres isothermes Ellipsoid als Linse. Entsprechendes gilt für eine Scheibe ohne Dichtesingularität.

Mit den angedeuteten isothermen Linsenmodellen werden wir also imstande sein, die Linseneigenschaften einfacher Galaxienmodelle für elliptische und Spiralgalaxien wiederzugeben. Deshalb wenden wir uns in diesem und dem folgenden Kapitel der Aufgabe zu, isotherme Gravitationslinsenmodelle zu untersuchen.

4.2 Die singuläre isotherme Sphäre

Die dimensionslose Flächenmassendichte dieser Linse lautet

$$\kappa(r) = \frac{1}{2r} \quad ,$$

wobei $r = |\mathbf{x}|$ der Betrag des skalierten Vektors in der Linsenebene ist, den wir im zweiten Kapitel definiert haben. Liegt die Quelle nicht auf der optischen Achse, $\mathbf{y} \neq 0$, so wird aufgrund der Rotationsymmetrie der Linse in beiden Ebenen eine besondere Richtung $\mathbf{e}_y := \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ ausgezeichnet. Sie bestimmt die Lage der Bilder durch $\mathbf{x} = x \mathbf{e}_y$, wobei $x = \pm|\mathbf{x}|$ im Gegensatz zu r durchaus negativ werden kann. In den Worten der Allgemeinen Relativitätstheorie ausgedrückt bildet die vom Beobachter, der Quelle und den Bildern aufgespannte „Ebene“ eine geodätische (dreidimensionale) Untermannigfaltigkeit der Raumzeit. Wir werden daher in diesem Abschnitt alle vektoriellen Größen auf den Einheitsvektor \mathbf{e}_y beziehen. Aus dieser Materiedichte errechnen wir für den Ablenkwinkel $\alpha(x) = \frac{x}{r}$, wodurch sich die Linsengleichung als eindimensionale Gleichung

$$y = x - \frac{x}{r} = x - \operatorname{sgn} x$$

schreibt. Sie besitzt für $y := |\mathbf{y}| \in]0, 1[$ zwei Lösungen, nämlich $x = y + 1$ und $x = y - 1 < 0$. Das zweite Bild liegt also auf der anderen Seite des Linsenzentrums. Es verschwindet, falls $y \geq 1$ wird. Die erste der Lösungen wird durch ein Minimum, die zweite durch einen Sattelpunkt des Fermat-Potentials

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 - r$$

gegeben. Würden wir die Singularität der Linse entfernen, so wäre das Ablenkpotential im Ursprung differenzierbar und es entstünde ein weiteres Bild im Kernbereich der Galaxie, was die Bildanzahl erwartungsgemäß ungeradzahlig machen würde. Die Quellposition $y = 0$ bildet eine Besonderheit: die Vorzugsrichtung \mathbf{e}_y ist nun nicht mehr definiert und alle Vektoren \mathbf{x} mit $r = |\mathbf{x}| = 1$ lösen die Linsengleichung—wir erhalten also ein kreisförmiges Bild¹. Verstärkung und Scherung sind durch

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{r}{r-1} \\ \gamma &= \frac{1}{2r} = \kappa \end{aligned}$$

¹Für eine endlich ausgedehnte Quelle würden wir einen Ring erhalten, der bei leicht gebrochener Symmetrie in zwei mehr oder weniger deutliche Bruchstücke zerfällt. Derartige Gebilde sind tatsächlich schon beobachtet worden.

gegeben—Bilder werden senkrecht zur Vorzugsrichtung \mathbf{e}_y um den Faktor $|\mu|$ gedehnt. Die Kreislinie mit Radius eins ist die kritische Linie² dieser Linse. Sie wird auf den Ursprung der Quellenebene abgebildet. Die Gesamtverstärkung einer Punktquelle ist

$$\mu_{\text{p}} = \begin{cases} \frac{2}{y} & \text{für } y \in]0, 1[\\ \frac{1+y}{y} & \text{für } y \geq 1 \end{cases} .$$

Daraus können wir mühelos den Wirkungsquerschnitt für eine bestimmte Mindestverstärkung errechnen. Er lautet:

$$\sigma(\mu_{\text{p}} > \mu_{\text{min}}) = \begin{cases} \frac{4\pi}{\mu_{\text{min}}^2} & \text{für } \mu_{\text{min}} \geq 2 \\ \frac{\pi}{(\mu_{\text{min}}-1)^2} & \text{für } \mu_{\text{min}} \in]1, 2[\end{cases} .$$

Der Laufzeitunterschied zwischen den beiden Bildern beträgt

$$\delta t = 2(1 + z_{\text{d}}) \frac{D_{\text{s}} \xi_0^2}{D_{\text{d}} D_{\text{ds}}} y .$$

4.3 Die Multipolentwicklung der SIE-Linse

In diesem Abschnitt wollen wir die Multipolentwicklung der SIE-Linse untersuchen. Deren exakte Lösung betrachten wir im nächsten Abschnitt. Neben der in vielen Fällen etwas einfacheren analytischen Darstellbarkeit besitzt die lineare Ordnung der Entwicklung im Vergleich zur exakten Lösung den enormen Vorteil, daß die Linsengleichung leicht auflösbar ist. Wir werden im Paragraphen „Auflösung der Linsengleichung“ diskutieren, was wir darunter verstehen wollen.

Flächenmassendichte. Die Multipolentwicklung der Flächenmassendichte der SIE-Linse $\kappa(r, \phi) = \frac{1}{2r\Delta(\phi)}$ mit $\Delta(\phi) = \sqrt{\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi}$ lautet nach Gl. (A.1)

$$\kappa(r, \phi) = \kappa^{(\infty)}(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{2r} \cos(2n\phi) ,$$

wobei wir $k_n := 2r\kappa_n(r)$ gesetzt haben. k_n ist dann unabhängig von r und aus den Glen. (A.2) zu erhalten:

$$k_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = \frac{2K}{\pi} =: k(f)$$

²Sie heißt manchmal auch tangentielle kritische Linie, da der Eigenvektor zum Eigenwert null der Tangentialvektor an diese Kurve ist.

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\phi)}{\Delta(\phi)} d\phi = \frac{4}{\pi f'^2} (2E - (1 + f^2)K) =: 3a(f) \\
k_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(4\phi)}{\Delta(\phi)} d\phi = \\
&= \frac{32}{3\pi f'^4} (2f^2 K - (1 + f^2)E) + \frac{4K}{\pi} \\
k_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2n\phi)}{\Delta(\phi)} d\phi \quad \text{für } n \geq 3 \quad .
\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir $f' := \sqrt{1 - f^2}$. $K = K(f') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - f'^2 \sin^2 \phi}}$ und $E = E(f') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - f'^2 \sin^2 \phi} d\phi$ bezeichnen die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Die analytische Berechnung der Koeffizienten k_n für $n \geq 3$ ist sehr mühsam, denn wir finden nur noch die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{2n}{2n+1} \frac{1 + f'^2}{f'^2} S_{n-1} - \frac{2n-1}{(2n+1)f'^2} S_{n-2} \\
\text{mit } S_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{(2n+2)} \phi}{\Delta(\phi)} d\phi \quad ,
\end{aligned}$$

mit deren Hilfe wir dann k_n bestimmen können, wenn wir

$$\cos(2n\phi) = 1 - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} \left[\prod_{l=0}^m 4(n^2 - l^2) \right] \sin^{(2m+2)} \phi$$

als Polynom in $\sin \phi$ ausdrücken. Die speziellen Abkürzungen $k_0 = k$ und $k_1 = 3a$ wurden eingeführt, um sie in der Multipolentwicklung bis zur linearen Ordnung einzusetzen. Abb. 4.2 zeigt die Koeffizienten $k(f)$ und $a(f)$ in Abhängigkeit der Elliptizität der Linse.

Brechen wir die Reihenentwicklung nach q Gliedern ab, so erhalten wir als Linsenmodell eine Approximation an die obige Flächenmassendichte, die wir mit $\kappa^{(q)}$ bezeichnen wollen. Andere mit diesem Modell verbundene Größen wie zum Beispiel das Fermat-Potential werden wir entsprechend benennen. $q = \infty$ ist dann natürlich die SIE-Linse, während die entsprechenden Näherungen *SIE-Mq-Linse* heißen sollen. Die Flächenmassendichte der SIE-M1-Linse schreibt sich also

$$\kappa^{(1)}(r, \phi) = \frac{1}{2r} (k + 3a \cos(2\phi)) \quad .$$

Abb. 4.3 zeigt deren Iso-Dichte-Linien für verschiedene Elliptizitäten und zum Vergleich gestrichelt die zugehörige exakte Ellipse. Wir können erkennen, daß für $f \gtrsim 0.6$ die Abweichung relativ geringfügig ist, während sich für stärkere Elliptizitäten die bei derartigen Entwicklungen charakteristischen, hantelförmigen Verzerrungen zeigen.

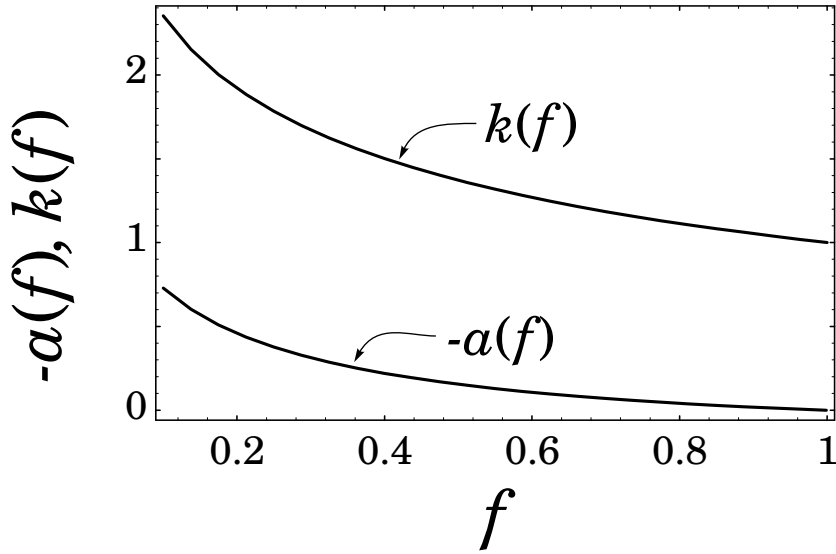


Abbildung 4.2: $-a(f)$ und $k(f)$ in Abhängigkeit der Elliptizität f .

Ablenkpotential, Linsengleichung. Die SIE-Linse besitzt weder endliche Gesamtmasse noch eine endliche Flächenmassendichte im Linsenzentrum. Deshalb können wir Gl. (A.4) im Fall $n = 0$ nicht verwenden, um das Ablenkpotential zu bestimmen. Wir erkennen aber leicht, daß der Ansatz $\psi_0(r) = k_0 r$ die Differentialgleichung (A.3) für $n = 0$ löst. Im Fall $n \geq 1$ nutzen wir die Glen. (A.4), womit wir dann $\psi_n(r) = -\frac{k_n}{4n^2-1} r$ für beliebiges n erhalten. Daraus ergibt sich für das Ablenkpotential

$$\psi^{(q)}(r, \phi) = - \sum_{n=0}^q \frac{k_n r}{4n^2 - 1} \cos(2n\phi) \quad .$$

Bis zur linearen Ordnung entwickelt schreibt sich dieses

$$\psi^{(1)}(r, \phi) = kr - ar \cos(2\phi) \quad .$$

Für die Linsengleichung erhalten wir mit Gl. (A.5) die Beziehungen

$$\begin{aligned} y_1 &= r \cos \phi + \sum_{n=0}^q \left[\frac{k_n}{4n^2 - 1} \cos(2n\phi) \cos \phi + \frac{2nk_n}{4n^2 - 1} \sin(2n\phi) \sin \phi \right] \\ y_2 &= r \sin \phi + \sum_{n=0}^q \left[\frac{k_n}{4n^2 - 1} \cos(2n\phi) \sin \phi - \frac{2nk_n}{4n^2 - 1} \sin(2n\phi) \cos \phi \right] , \end{aligned}$$

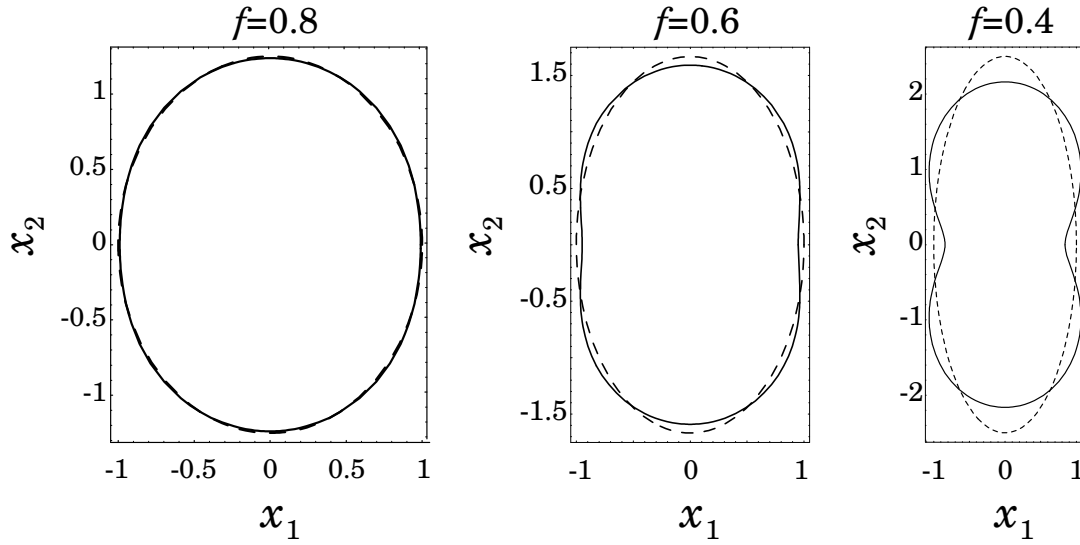


Abbildung 4.3: Linien gleicher Dichte $\kappa^{(1)} = \frac{1}{2}$ der SIE-M1-Linse für die Elliptizitäten $f = 0.8, 0.6$ und 0.4 . Die gestrichelten Linien geben die entsprechenden Ellipsen der exakten Verteilung an. Wegen Gl. (B.2) sind diese gleichzeitig die kritischen Linien der entsprechenden Modelle.

die Linsengleichung der SIE-M1-Linse lautet

$$\begin{aligned} y_1 &= (r + 3a - k) \cos \phi - 2a \cos^3 \phi \\ y_2 &= (r - 3a - k) \sin \phi + 2a \sin^3 \phi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Linsengleichungen der SIE-M q -Linse sind wegen der divergierenden Flächenmassendichte bei $\mathbf{x} = 0$ unstetig.

Verstärkung, Grenzlinie und Kaustik. Für die Verstärkungsmatrix gilt, wie wir im Anhang B zeigen werden,

$$A^{(q)} = \begin{pmatrix} 1 - 2\kappa^{(q)} \sin^2 \phi & \kappa^{(q)} \sin(2\phi) \\ \kappa^{(q)} \sin(2\phi) & 1 - 2\kappa^{(q)} \cos^2 \phi \end{pmatrix} .$$

Daraus ergeben sich mühelos die Gleichungen

$$\begin{aligned} \det A^{(q)} &= 1 - 2\kappa^{(q)} \\ \text{tr } A^{(q)} &= 2(1 - \kappa^{(q)}) = 1 + \det A^{(q)} \end{aligned}$$

für die Spur von $A^{(q)}$ und den Kehrwert der Verstärkung. Mit dem Begriff *Grenzklinie* wollen wir diejenigen Quellpositionen bezeichnen, die ein „Bild“ am Ursprung der Linsenebene haben, für die also $\mathbf{y}(\phi) = \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{y}(r, \phi) = -\boldsymbol{\alpha}(\phi)$ mit $\phi \in [0, 2\pi[$ gilt. Diese Kurve besitzt eine weitere Bedeutung, die wir im Paragraphen „Lage und Anzahl der Bilder“ anschneiden wollen. In Abhängigkeit des Parameters ϕ können wir sie sofort angeben:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{n=0}^q \left[\frac{k_n}{4n^2 - 1} \cos(2n\phi) \cos \phi + \frac{2nk_n}{4n^2 - 1} \sin(2n\phi) \sin \phi \right] \\ y_2 &= \sum_{n=0}^q \left[\frac{k_n}{4n^2 - 1} \cos(2n\phi) \sin \phi - \frac{2nk_n}{4n^2 - 1} \sin(2n\phi) \cos \phi \right] \quad . \end{aligned}$$

Die kritische Kurve ist die Iso-Dichte-Linie $\kappa^{(q)} = \frac{1}{2}$, und damit gilt für sie

$$r = \sum_{n=0}^q k_n \cos(2n\phi) \quad .$$

Deren Abbild in der Quellenebene heißt Kaustik und wird durch

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{n=1}^q \left[\frac{4n^2 k_n}{4n^2 - 1} \cos(2n\phi) \cos \phi + \frac{2nk_n}{4n^2 - 1} \sin(2n\phi) \sin \phi \right] \\ y_2 &= \sum_{n=1}^q \left[\frac{4n^2 k_n}{4n^2 - 1} \cos(2n\phi) \sin \phi - \frac{2nk_n}{4n^2 - 1} \sin(2n\phi) \cos \phi \right] \end{aligned}$$

beschrieben. Die SIE-M1-Linse hat als Grenzklinie

$$\begin{aligned} y_1 &= (3a - k) \cos \phi - 2a \cos^3 \phi \\ y_2 &= (-3a - k) \sin \phi + 2a \sin^3 \phi \end{aligned}$$

und für die kritische Kurve (siehe Abb. 4.3) gilt

$$r = k + 3a \cos(2\phi) \quad .$$

Die zugehörige Kaustik können wir sowohl in Parameterform als auch parameterfrei angeben. Im ersten Fall gilt

$$\begin{aligned} y_1 &= 4a \cos^3 \phi \\ y_2 &= -4a \sin^3 \phi \quad , \end{aligned}$$

im zweiten

$$y_2 = \pm \left(2(2a^2)^{1/3} - (y_1^2)^{1/3} \right)^{3/2} \quad .$$

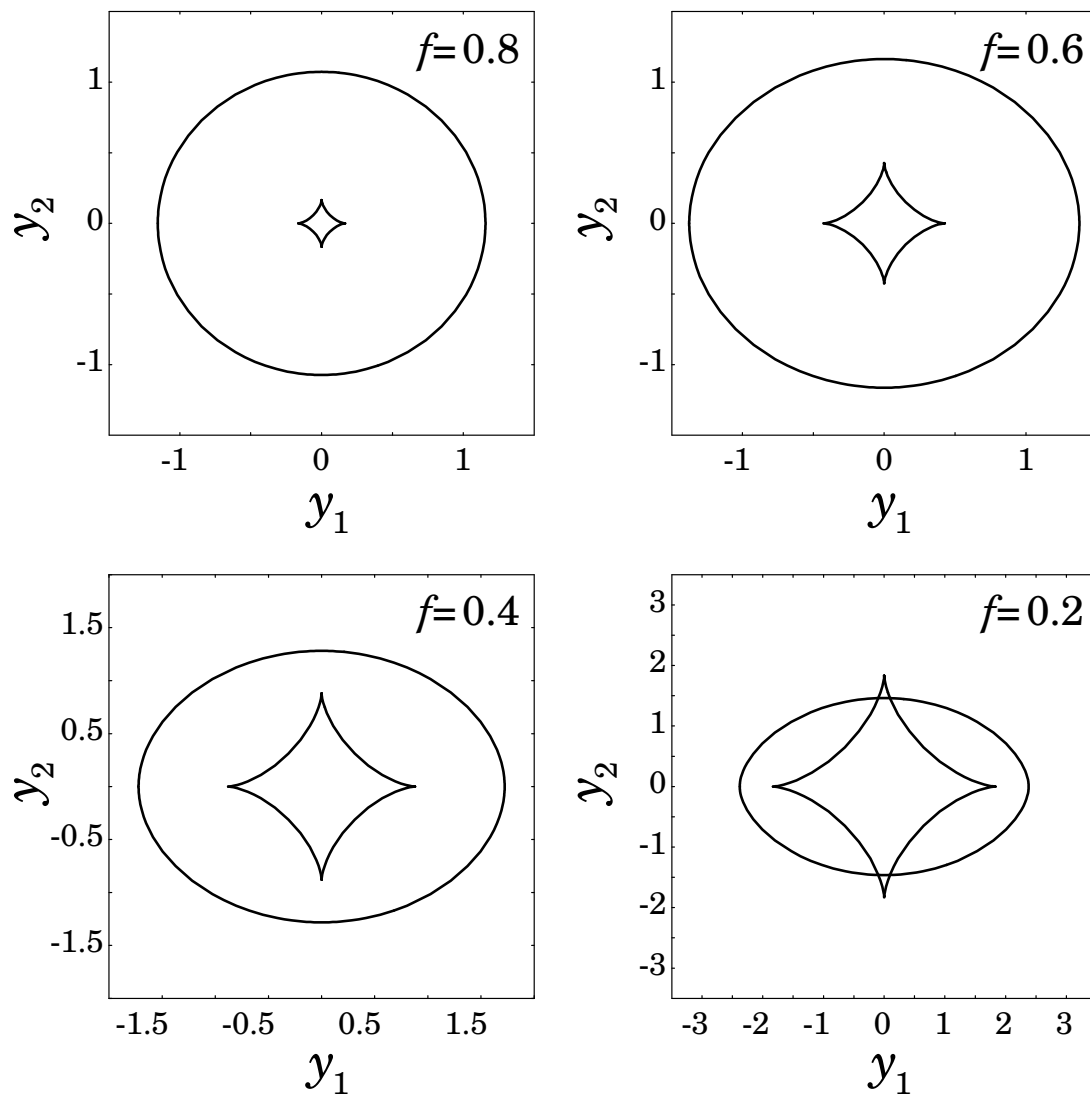


Abbildung 4.4: Grenzlinie und Kaustik der SIE-M1-Linse für verschiedene Elliptizitäten f . Die Kaustik besitzt vier Spitzen auf den Achsen.

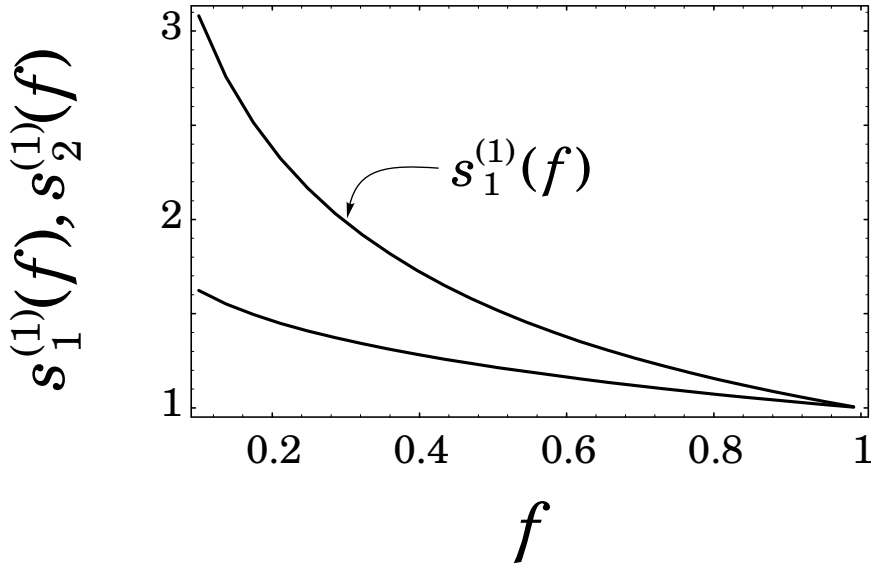


Abbildung 4.5: Die Koeffizienten $s_1^{(1)}$ und $s_2^{(1)}$ der SIE-M1-Linse. Sie bezeichnen die Schnittpunkte der Grenzlinie mit den Achsen.

Abb. 4.4 zeigt Grenzlinien und Kaustiken der SIE-M1-Linse für verschiedene Elliptizitäten. Die Schnittpunkte der Grenzlinie mit den Achsen sind

$$\begin{aligned} y_1 &= \pm s_1^{(1)} & \text{mit} & \quad s_1^{(1)} := k - a \\ y_2 &= \pm s_2^{(1)} & \text{mit} & \quad s_2^{(1)} := k + a \end{aligned} .$$

Die Koeffizienten $s_1^{(1)}$ und $s_2^{(1)}$ sind in Abb. 4.5 dargestellt. Für die Kaustik liegen diese Punkte, die die Lage der Spitzen beschreiben, bei

$$y_1 = y_2 = \mp 4a \quad .$$

Dies bedeutet, daß längs der 2-Achse für $f \lesssim 0.3$ die Spitzen der Kaustik außerhalb des von der Grenzlinie umschlossenen Bereichs liegen. Grenzlinie und Kaustik müssen sich also schneiden. Auf der anderen Achse geschieht dies erst bei $f \simeq 0.1$, wie dies Abb. 4.6 zeigt. Für die SIE-M q -Linse gilt Entsprechendes, wenn wir

$$\begin{aligned} s_1^{(q)} = s_1 &:= - \sum_{n=0}^q \frac{k_n}{4n^2 - 1} \\ s_2^{(q)} = s_2 &:= - \sum_{n=0}^q \frac{(-1)^n k_n}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$

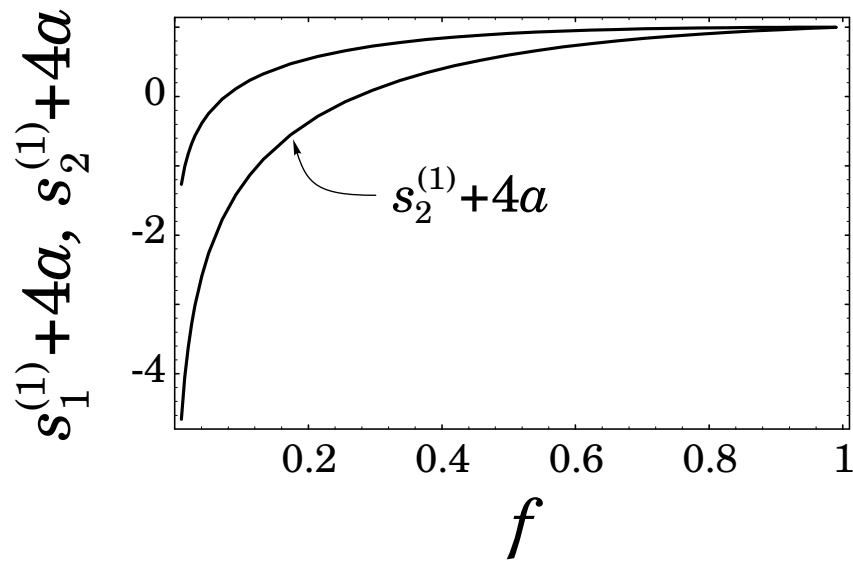


Abbildung 4.6: Der Abstand zwischen der Spitze und der Grenzlinie auf der entsprechenden Achse. Negativer Abstand bedeutet, daß die Spitze außerhalb des von der Grenzlinie umschlossenen Bereichs liegt.

setzen. Im Falle der Spitzen haben wir

$$y_1 = \mp \sum_{n=1}^q \frac{4n^2 k_n}{4n^2 - 1}$$

$$y_2 = \mp \sum_{n=1}^q \frac{4(-1)^n n^2 k_n}{4n^2 - 1} .$$

Auflösung der Linsengleichung. Eine Linsengleichung, für die sich eine einfache Prozedur angeben läßt, mit deren Hilfe wir alle Bilder zu einer gegebenen Quellposition finden können, wollen wir als leicht auflösbar bezeichnen. Derartige leicht auflösbare Linsengleichungen sind besonders bequem handzuhaben, da wir häufig mit dem Problem konfrontiert sind, die Bilder zu einer gegebenen Quellposition zu finden. Da sich die Auflösung für die SIE-M1-Linse sehr befriedigend bewerkstelligen läßt, werden wir hier dieser Linsengleichung besonderen Vorzug geben.

Befindet sich nämlich ein Bild abseits der Achsen, so können wir die Linsengleichung der SIE-M1-Linse durch Multiplizieren der ersten Gleichung von (4.1) mit dem Kosinus

und der zweiten mit dem Sinus von ϕ nach r auflösen:

$$r = y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi - a \cos(2\phi) + k \quad .$$

Setzen wir diese Gleichung wieder in die Linsengleichung ein, so erhalten wir ein Polynom vierten Grades in $t := \cos \phi$, nämlich

$$16a^2 t^4 - 8ay_1 t^3 + (|y|^2 - 16a^2)t^2 + 8ay_1 t - y_1^2 = 0 \quad .$$

Die Lösungen dieses Polynoms lassen sich im Prinzip explizit angeben, sie sind aber enorm unübersichtlich. Andererseits können wir numerisch die Nullstellen eines derartigen Polynoms leicht finden. Dabei müssen wir allerdings beachten, daß nicht alle Lösungen des Polynoms mit $t \in [-1, 1]$ auch die Linsengleichung lösen—wir dürfen also nicht vergessen, die Gültigkeit einer Lösung durch Einsetzen in die Linsengleichung zu überprüfen.

Liegt das Bild jedoch auf einer der Achsen, so muß die zugehörige Quelle auch auf dieser Achse liegen. Für eine Quelle auf der positiven 1-Achse erhalten wir eine Lösung bei

$$\phi = 0 ; \quad r = y_1 + s_1^{(1)} \quad .$$

Gilt $y_1 < s_1^{(1)}$, so finden wir ein weiteres Bild bei

$$\phi = \pi ; \quad r = s_1^{(1)} - y_1 \quad .$$

Zwei zusätzliche, abseits der Achsen liegende Lösungen besitzt die Linsengleichung dann, wenn $y_1 < -4a$ gilt. Dann befindet sich die Quelle nämlich innerhalb der Kaustik und die Bilder sind durch die Gleichungen

$$\cos \phi = \frac{y_1}{4a} ; \quad r = k + a + \frac{y_1^2}{8a^2}$$

gegeben. Für die andere Achse haben wir entsprechend

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\pi}{2} ; \quad r = y_2 + s_2^{(1)} \\ \phi &= \frac{3\pi}{2} ; \quad r = s_2^{(1)} - y_2 \\ \sin \phi &= -\frac{y_2}{4a} ; \quad r = k - a - \frac{y_2^2}{8a^2} \end{aligned}$$

zu setzen. Für den Fall der Entwicklung bis zur q -ten Ordnung sind die Bilder auf den Achsen durch entsprechende Gleichungen gegeben, wenn wir $s_1^{(1)}$ und $s_2^{(1)}$ durch $s_1^{(q)}$ und $s_2^{(q)}$ ersetzen. Für die beiden nicht auf den Achsen liegenden Bilder und für eine nicht auf den Achsen liegende Quelle erhalten wir auf ähnliche Art wie oben komplizierte implizite Gleichungen in ϕ , deren analytische Lösung unmöglich oder zumindest äußerst umständlich ist.

Lage und Anzahl der Bilder. In diesem Paragraphen wollen wir qualitativ den Ort und die Eigenschaften der Bilder zu einer gegebenen Quelle diskutieren. Aufgrund der Symmetrie der Linse können wir uns auf Lichtquellen im ersten Quadranten der Quellenebene beschränken. Wir wollen uns mit der Quelle von sehr großem radialen Abstand auf den Ursprung der Quellenebene zubewegen. Außerdem werden wir annehmen, daß wir dabei zuerst die Grenzlinie und dann erst die Kaustik überschreiten. Später werden wir noch den umgekehrten Fall betrachten, der ja nur bei hinreichend starker Elliptizität der Linse möglich ist.

Am Start unserer „Quellreise“ besitzt die Quelle ein einziges Bild, das sich im ersten Quadranten der Linsenebene befindet. Diese Lösung der Linsengleichung, die wir vorübergehend „erstes Bild“ nennen wollen, besitzt positive Parität und eine geringfügige Verstärkung, das heißt $|\mu| \gtrsim 1$. Es verläßt unabhängig von der Quellposition nie den ersten Quadranten und überschreitet nie die kritische Kurve, behält also auch seine Händigkeit bei. Wenn wir mit der Quelle die Grenzlinie überschreiten, entsteht zu diesem ersten Bild ein „zweites“, das sich im dritten Quadranten der Linsenebene sehr dicht am Ursprung befindet. Aufgrund von $\mu = \frac{1}{1-2\kappa}$ besitzt es negative Parität und ist außerdem sehr schwach. Im Gegensatz dazu hat das erste Bild typischerweise einen Verstärkungsfaktor von zwei erreicht. Unabhängig vom Quellort ist der Aufenthalt dieses zweiten Bildes auf die von den Achsen und der kritischen Kurve begrenzte Fläche beschränkt, es erhält also ebenfalls seine Parität. Hier sehen wir die bei der Definition des Begriffes angedeutete zusätzliche Eigenschaft der Grenzlinie. Sie umschließt den Bereich der Quellenebene, in dem dieses zweite Bild existiert. Die für Gravitationslinsen untypische gerade Anzahl von Bildern wird von der Singularität der Flächenmassendichte verursacht. Diese führt zu einem Ablenkpotential, das am Ursprung nicht differenzierbar ist, so daß ein Extremum als Bildort „ausfällt“. Entfernen wir die Singularität, so wird aus der Grenzlinie eine Kaustik. Die Bildanzahl wird dann auch wieder ungerade, da das Ablenkpotential am Ursprung differenzierbar wird.

Überschreiten wir nun noch die Kaustik, so finden wir zwei neue Bilder nahe der kritischen Linie im zweiten Quadranten. Davon liegt eines „innerhalb“ und eines „außerhalb“ der kritischen Kurve. Das erste besitzt also negative, das zweite positive Parität. Diese Bilder wollen wir jetzt „Kaustik-Bilder“ nennen. Der Betrag der Verstärkung dieser Bilder ist aufgrund der im Abschnitt 2.3 diskutierten Eigenschaften der Kaustik sehr groß, nimmt aber rapide ab, wenn wir uns mit der Quelle von ihr in Richtung Ursprung entfernen.

Setzen wir nun die Quelle in den Ursprung der Quellenebene, so haben wir vier Bilder, die sich auf den Achsen der Linsenebene bei $x_1 = \pm s_1^{(q)}$ und $x_2 = \pm s_2^{(q)}$ befinden. Daher liegen die beiden Bilder mit negativer Parität, also das zweite Bild und eines der Kaustik-Bilder, auf der 2-Achse und innerhalb des von der kritischen Kurve umschlossenen Bereiches, die beiden anderen liegen auf der 1-Achse und außerhalb.

Offensichtlich entstehen das zweite Bild und die beiden Kaustik-Bilder in umgekehrter

Reihenfolge, wenn wir zuerst die Kaustik und dann erst die Grenzlinie überschreiten. Befindet sich die Quelle in einem der drei anderen Quadranten, so sind die Bildorte entsprechend der Symmetrie zu vertauschen.

Hohe Verstärkung, Lichtlaufzeit und Wirkungsquerschnitte. Für diese Betrachtungen wollen wir uns aus Gründen einfacher Darstellbarkeit auf die SIE-M1-Linse beschränken. Wir erhalten für die Näherungen (B.4) und (B.5) in diesem Fall

$$\begin{aligned} |\mu| &= -\frac{(k + 3a \cos(2\phi))^2}{3a |\sin(2\phi)|} \frac{1}{\delta x} \\ c\delta t &= -(1 + z_d) \frac{D_s \zeta_0^2}{D_d D_{ds}} \frac{a |\sin(2\phi)|}{2(k + 3a \cos(2\phi))^2} (\delta x)^3 \end{aligned} .$$

δx bezeichnet den im Abschnitt 2.3 definierten Abstand zweier hoch verstärkter Bilder, δt deren Laufzeitunterschied. Für diese beiden Näherungsformeln ist wesentlich, daß sich die Quelle in der Umgebung einer Falte befindet. Sie werden für eine nahe bei einer Spitze gelegenen Quelle unbrauchbar. Dies führt im Fall der SIE-M1-Linse dazu, daß $\sin(2\phi)$ und $\cos(2\phi)$ wesentlich von null verschieden sein müssen. Kommen wir nun zu den Wirkungsquerschnitten. Derjenige für hohe Verstärkungen (B.3) und die von der Grenzlinie und der Kaustik umschlossenen Flächen lauten:

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\mu_p > \mu_{\min}) &= \frac{2\pi(2k^2 + 9a^2)}{\mu_{\min}^2} + \\ &+ \frac{16\sqrt{6}}{15\mu_{\min}^{5/2}} \left[(k + 3a)^2 \sqrt{\frac{k + 3a}{-12a}} + (k - 3a)^2 \sqrt{\frac{k - 3a}{-12a}} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\sigma_g^{(1)} = \frac{\pi}{2}(2k^2 - 3a^2) \quad (4.3)$$

$$\sigma_k^{(1)} = 6\pi a^2 \quad (4.4)$$

Abb. 4.7 zeigt den Verlauf der Wirkungsquerschnitte $\sigma_g^{(1)}$ und $\sigma_k^{(1)}$ in Abhängigkeit von f . Da mit Ausnahme sehr extremer Elliptizitäten die Kaustik ganz von der Grenzlinie umschlossen wird ($f \gtrsim 0.3$ für $q = 1$), bezeichnet $\sigma_g^{(q)}$ im allgemeinen den Wirkungsquerschnitt für Mehrfachabbildungen der Quelle und $\sigma_k^{(q)}$ denjenigen für vier Bilder.

4.4 Das singuläre isotherme Ellipsoid

Flächenmassendichte. Nun wollen wir uns der Linsengleichung für die exakt elliptische Materieverteilung

$$\kappa(r, \phi) = \frac{1}{2r\Delta(\phi)}$$

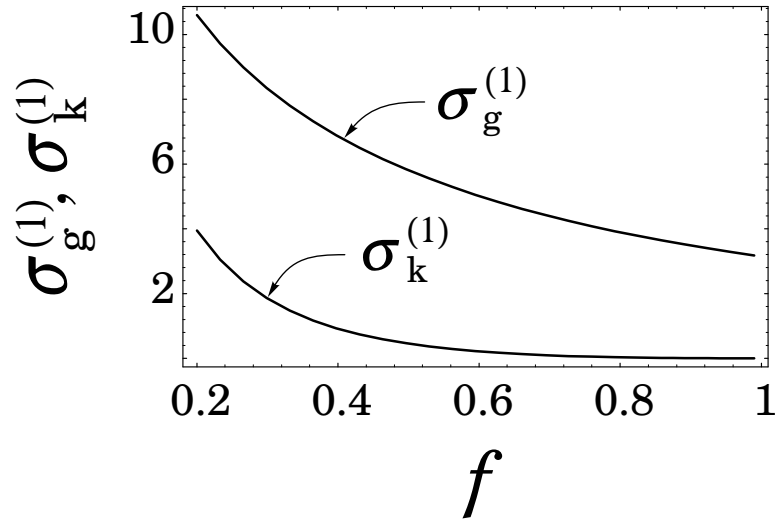


Abbildung 4.7: Die Wirkungsquerschnitte $\sigma_g^{(1)}(f)$ und $\sigma_k^{(1)}(f)$.

zuwenden. $\Delta(\phi) = \sqrt{\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi}$ als Ergänzung zur Flächenmassendichte der singulären isothermen Sphäre macht aus kreisförmigen Linien gleicher Dichte κ Ellipsen, wie wir dies im Abschnitt 4.1 dargestellt haben. Wir nennen $0 < f < 1$ wie bisher auch Elliptizität und bezeichnen damit das Verhältnis von kleiner zu großer Halbachse der Ellipsen konstanter Flächenmassendichte. Im Grenzfalle $f = 1$ geht dieses Modell natürlich in den rotationssymmetrischen Fall der singulären isothermen Sphäre über.

Ablenkpotential, Linsengleichung. Schreiben wir die Poisson-Gleichung (2.5) in Polarkoordinaten, also

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 2\kappa = \frac{1}{r \Delta(\phi)},$$

so erkennen wir, daß der Produktansatz $\psi(r, \phi) =: r \tilde{\psi}(\phi)$ diese partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche überführt, die durch

$$\tilde{\psi} + \frac{d^2 \tilde{\psi}}{d\phi^2} = \frac{1}{\Delta(\phi)}$$

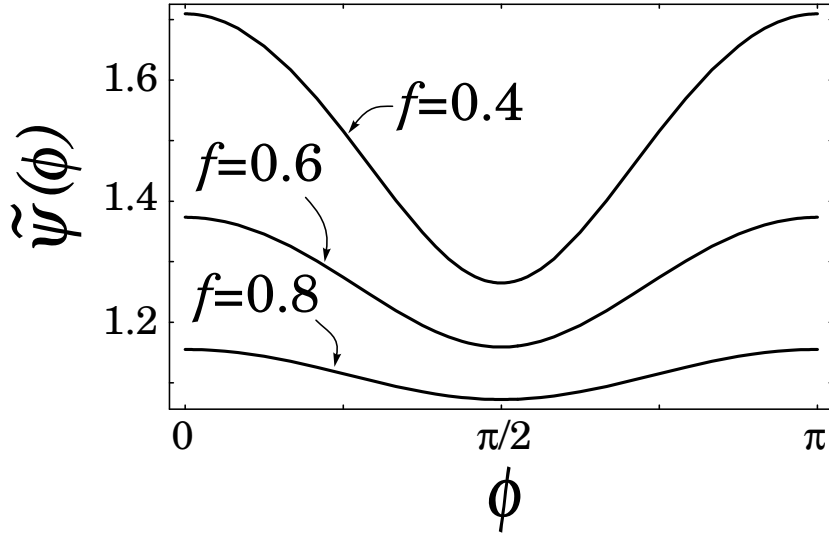


Abbildung 4.8: $\tilde{\psi}$ als Funktion des Winkels ϕ für verschiedene Elliptizitäten f . Diese Funktion beschreibt die Abweichung des Ablenkpotentials vom rotationssymmetrischen Fall der singulären isothermen Sphäre aus Abschnitt 4.2.

gegeben ist. Sie läßt sich mit Hilfe der Greenschen Methode lösen. Das Ergebnis für ψ ist:

$$\begin{aligned}\psi(r, \phi) &= \frac{r}{f'} [\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi) + \cos \phi \operatorname{arsinh}(\frac{f'}{f} \cos \phi)] = \\ &= \frac{r}{f'} [\sin \phi \arccos \Delta + \cos \phi \operatorname{arcosh} \frac{\Delta}{f}]\end{aligned}$$

Darin haben wir $f' = \sqrt{1 - f^2}$ gesetzt. $\tilde{\psi}$ bildet die Abweichung des Ablenkpotentials von dem der singulären isothermen Sphäre und ist für verschiedene Elliptizitäten f in Abb. 4.8 dargestellt. Durch Gradientenbildung $\boldsymbol{\alpha} = \nabla \psi$ erhalten wir den Ablenkwinkel und damit die Linsengleichung

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{x} - \frac{1}{f'} [\operatorname{arsinh}(\frac{f'}{f} \cos \phi) \mathbf{e}_1 + \arcsin(f' \sin \phi) \mathbf{e}_2] = \\ &= \mathbf{x} - \frac{1}{f'} [\operatorname{arcosh} \frac{\Delta}{f} \mathbf{e}_1 + \arccos \Delta \mathbf{e}_2]\end{aligned}\quad (4.5)$$

Wegen $\lim_{f \rightarrow 1} [\frac{1}{f'} \operatorname{arsinh}(\frac{f'}{f} \cos \phi)] = \cos \phi$ und $\lim_{f \rightarrow 1} [\frac{1}{f'} \arcsin(f' \sin \phi)] = \sin \phi$ erhalten wir im rotationssymmetrischen Fall die Linsengleichung der singulären isothermen Sphäre.

Verstärkung, Grenzlinie und Kaustik. Direkte Differentiation der eben abgeleiteten Linsengleichung (4.5) oder Anwendung der im Anhang B abgeleiteten Eigenschaft der Jacobimatrix singulärer isothermer Linsenmodelle auf den Fall $q = \infty$ liefert uns die Verstärkungsmatrix der SIE-Linse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\kappa \sin^2 \phi & \kappa \sin(2\phi) \\ \kappa \sin(2\phi) & 1 - 2\kappa \cos^2 \phi \end{pmatrix} .$$

Die im Anhang angegebenen Beziehungen, besonders $\det A = 1 - 2\kappa$ und $\operatorname{tr} A = 1 + \det A$, gelten also auch für die SIE-Linse. Die Linien gleicher Verstärkung μ eines Bildes der Quelle sind Ellipsen mit $r = \frac{\mu}{(\mu-1)\Delta}$, die kritische Kurve ist durch $r = \frac{1}{\Delta}$ gegeben. Ebenso wie für die Multipolentwicklung können wir die Grenzlinie und die Kaustik in parametrisierter Form angeben. Die Grenzlinie ist, wie im vorangegangenen Abschnitt definiert, die Menge der Quellorte mit einem „Bild“ am Ursprung, also

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\phi) = \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{y}(r, \phi) = -\boldsymbol{\alpha}(\phi) &= -\frac{1}{f'} [\operatorname{arsinh}(\frac{f'}{f} \cos \phi) \mathbf{e}_1 + \arcsin(f' \sin \phi) \mathbf{e}_2] = \\ &= -\frac{1}{f'} [\operatorname{arcosh} \frac{\Delta}{f} \mathbf{e}_1 + \arccos \Delta \mathbf{e}_2] . \end{aligned}$$

Für die Kaustik erhalten wir, indem wir die kritische Linie $r = \frac{1}{\Delta}$ mit Hilfe der Linsengleichung (4.5) auf die Quellenebene abbilden,

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\Delta} \cos \phi - \frac{1}{f'} \operatorname{arsinh}(\frac{f'}{f} \cos \phi) \\ y_2 &= \frac{1}{\Delta} \sin \phi - \frac{1}{f'} \arcsin(f' \sin \phi) . \end{aligned}$$

Grenzlinie und Kaustik sind für verschiedene Elliptizitäten f in Abb. 4.9 dargestellt. Zum Vergleich sind die entsprechenden Kurven der SIE-M1-Linse gestrichelt in die Abbildung eingetragen. Erwartungsgemäß ist die Abweichung der Grenzlinie kleiner als die der Kaustik, da die Grenzlinie durch ein Bild am Ursprung bestimmt wird und daher den Unterschied in der Massendichte zwischen der SIE-M1- und der SIE-Linse wesentlich weniger stark „spürt“. Die Grenzlinie schneidet die beiden Achsen bei

$$\begin{aligned} y_1 &= \pm s_1 \quad \text{mit} \quad s_1 := \frac{1}{f'} \operatorname{arcosh} \frac{1}{f} \\ y_2 &= \pm s_2 \quad \text{mit} \quad s_2 := \frac{1}{f'} \arccos f . \end{aligned}$$

Abb. 4.10 zeigt die Parameter s_1 und s_2 in Abhängigkeit von f . Die Spitzen der Kaustik liegen bei

$$y_1 = \pm(s_1 - 1)$$

auf der 1-Achse und bei

$$y_2 = \mp(s_2 - \frac{1}{f})$$

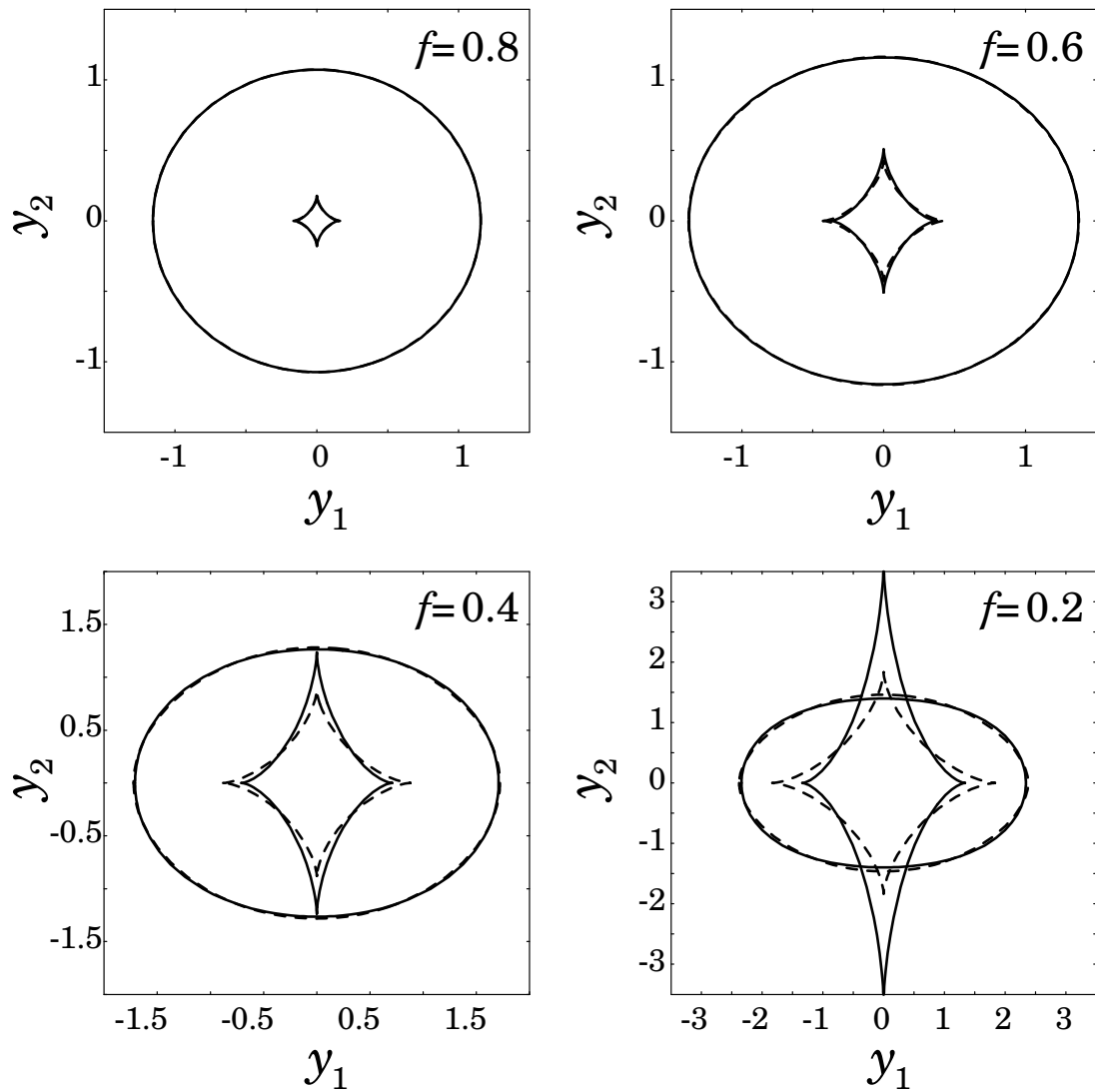


Abbildung 4.9: Grenzlinie und Kaustik der SIE-Linse. Die Kaustik besitzt vier Spitzen auf den Achsen. Zum Vergleich sind gestrichelt die entsprechenden Linien der SIE-M1-Linse eingezeichnet.

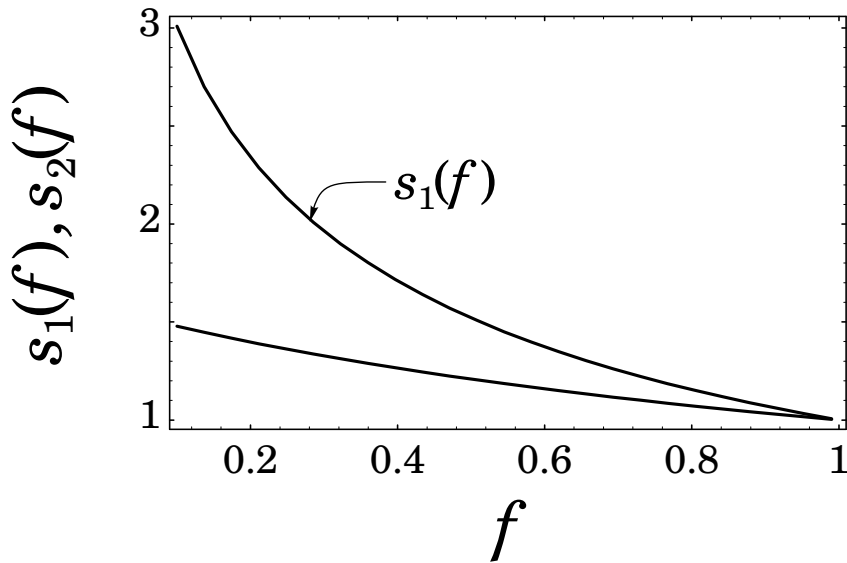


Abbildung 4.10: Die Schnittpunkte s_1 und s_2 der Grenzlinie mit den Achsen als Funktion der Elliptizität.

auf der 2-Achse. Die auf der 1-Achse liegen also immer innerhalb des von der Grenzlinie umschlossenen Bereichs, die der 2-Achse durchstoßen diese Region nach außen bei einer Elliptizität, die durch die implizite Gleichung $\arccos f = \frac{f'}{2f}$ gegeben ist. Diese Gleichung wird durch $f \simeq 0,4$ gelöst. Abb. 4.11 stellt den Schnittpunkt der Grenzlinie und der Kaustik mit der 2-Achse dar.

Auflösung der Linsengleichung. Bei der analytischen Auflösung der Linsengleichung läßt sich kein solcher Erfolg mehr erzielen wie für die SIE-M1-Linse. Wir können zwar genauso wie bei der SIE-M1-Linse vorgehen, um die Linsengleichung auf eine eindimensionale Gleichung zu reduzieren, diese ist jedoch von außerordentlicher Komplexität. Wir erhalten

$$(y_1 + \frac{1}{f'} \operatorname{arcosh} \frac{\Delta}{f}) \sin \phi - (y_2 + \frac{1}{f'} \arccos \Delta) \cos \phi = 0$$

als Gleichung für die Winkelkoordinate ϕ . Dabei ist vorausgesetzt, daß das Bild nicht auf einer der Achsen liegt, das heißt, daß $\cos \phi \neq 0 \neq \sin \phi$ gilt. Für die Radialkoordinate r gilt:

$$r = y_1 \cos \phi + y_2 \sin \phi + \tilde{\psi}(\phi) \quad .$$

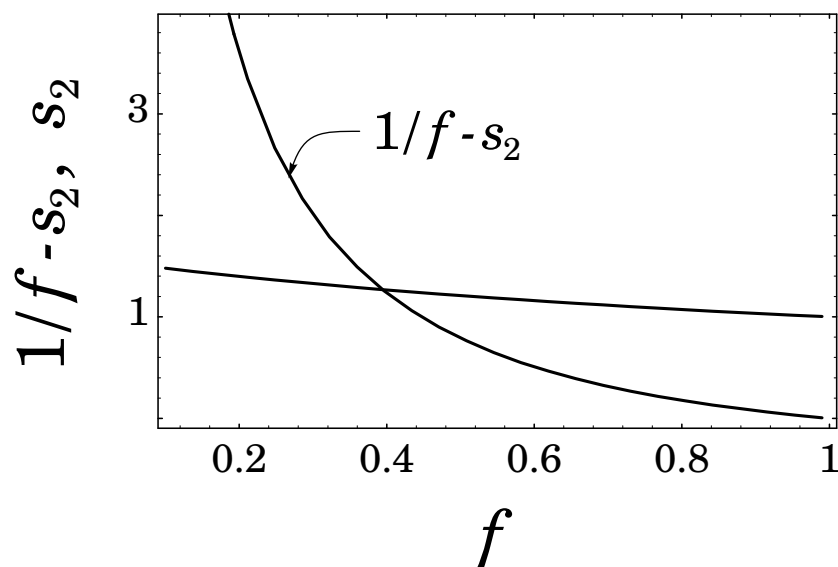


Abbildung 4.11: Der Ort der Spitze auf der 2-Achse und der Schnittpunkt der Grenzlinie mit der 2-Achse in Abhängigkeit der Elliptizität.

Wie bei der SIE-M1-Linse erfüllen nicht alle Lösungen dieses Gleichungssystems die Linsengleichung, so daß auch hier eine Kontrolle der Ergebnisse unumgänglich ist.

Bilder auf den Achsen treten nur dann auf, wenn die Quelle auch auf der entsprechenden Achse liegt. Für eine Quelle auf der positiven 1-Achse finden wir ein Bild bei $\phi = 0$ und $r = y_1 + s_1$ und, falls $y_1 < s_1$ gilt, ein weiteres bei $\phi = \pi$ und $r = s_1 - y_1$. Die Situation ist also völlig analog zu den SIE-M q -Linsenmodellen. Ist die Quelle jedoch noch „innerhalb“ der Kaustik, so existieren zwei weitere Bilder abseits der Achsen, die wir nur durch Lösen der impliziten Gleichung lokalisieren könnten. Ganz genauso ist die Situation auf der 2-Achse, nur daß wir im Vergleich zur 1-Achse die Winkel durch $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ und s_1 bzw. y_1 durch s_2 bzw. y_2 zu ersetzen haben.

Lage und Anzahl der Bilder. Für die qualitative Betrachtung der Bildorte und deren Eigenschaften gelten weiterhin die im vorangegangenen Abschnitt für die Multipolentwicklung gemachten Bemerkungen, so daß wir sie hier nicht nochmals wiederholen.

Hohe Verstärkung, Lichtlaufzeit und Wirkungsquerschnitte. Mit $\beta = \frac{1}{2\Delta}$ und $\beta_{,\phi} = \frac{f'^2 \sin(2\phi)}{4\Delta^3}$ erhalten wir für hoch verstärkte Bilder in der Nähe einer Falte nach

Gl. (B.4) die Beziehung

$$|\mu| = \frac{4\Delta}{f'^2 |\sin(2\phi)|} \frac{1}{\delta x} \quad .$$

Wählen wir als typische Rotverschiebungen $z_d = 0.5$ und $z_s = 2$, so erhalten wir in einem flachen ($\Omega = 1$) und glatten ($\tilde{\alpha} = 1$) Universum für $\phi = \frac{\pi}{4}$ und $f = 0.8$ die ungefähre Beziehung

$$|\mu| \simeq 7.2 \left(\frac{v}{220 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right)^2 \frac{1''}{\delta \theta} \quad ,$$

worin $\delta \theta$ den Winkelabstand der beiden Bilder beschreibt. Dabei haben wir als Skalenfaktor $\zeta_0 = 4\pi \frac{\sqrt{fv^2}}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s}$ benutzt. Die Verstärkung eines Bildes um den Faktor 20 führt also zu einem Bildabstand von etwa $0.36''$, wenn die Geschwindigkeitsdispersion genau $220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ beträgt. Für den Laufzeitunterschied (B.5) zweier bei einer Falte liegender Bilder erhalten wir

$$c\delta t = \frac{1}{24} (1 + z_d) \frac{D_s \zeta_0^2}{D_d D_{ds}} \frac{f'^2 |\sin(2\phi)|}{\Delta} (\delta x)^3$$

und mit den oben angegebenen Daten

$$\begin{aligned} \delta t &\simeq 2.2 \cdot 10^5 \text{ s} \left(\frac{220 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{v} \right)^2 \frac{1}{h_{50}} \left(\frac{\delta \theta}{1''} \right)^3 \simeq \\ &\simeq 1.0 \text{ d} \left(\frac{220 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{v} \right)^2 \frac{1}{h_{50}} \left(\frac{\delta \theta}{0.73''} \right)^3 \quad . \end{aligned}$$

Die oben angegebenen Bilder mit der Verstärkung 20 erreichen den Beobachter also knapp drei Stunden zeitversetzt ($h_{50} = 1$).

Nun wollen wir noch einige Wirkungsquerschnitte betrachten. Derjenige für hohe Verstärkungen (B.3) läßt sich in die Form

$$\sigma(\mu_p > \mu_{\min}) = \frac{4\pi}{f\mu_{\min}^2} + \frac{16\sqrt{6}}{15f'} \left(1 + \frac{1}{f} \right) \frac{1}{\mu_{\min}^{5/2}} \quad (4.6)$$

bringen. Dabei müssen wir für den Anteil der Falten, der durch den ersten Summand wiedergegeben wird, die Winkelintegration mit $\beta = \frac{1}{2\Delta}$ durchführen. Für den Spitzenanteil erhalten wir durch Summation über die auf den Achsen gelegenen Spitzen der SIE-Linse den zweiten Summanden des oberen Ausdrucks, wenn wir $\beta(0) = \beta(\pi) = \frac{1}{2}$, $\beta(\frac{\pi}{2}) = \beta(\frac{3}{2}\pi) = \frac{1}{2f}$, $\beta_{,\phi\phi}(0) = \beta_{,\phi\phi}(\pi) = \frac{f'^2}{2}$ und $\beta_{,\phi\phi}(\frac{\pi}{2}) = \beta_{,\phi\phi}(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{f'^2}{2f^3}$ verwenden. Abb. 4.12 zeigt außer der Grenzlinie und der Kaustik noch Linien gleicher

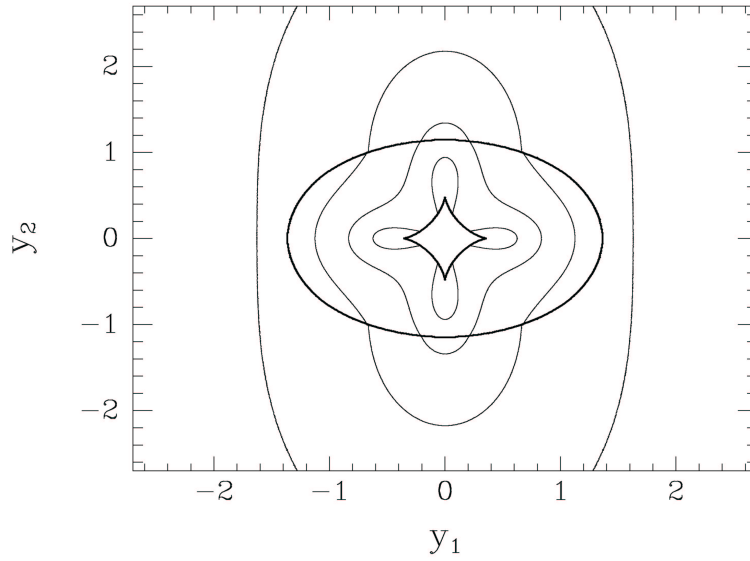


Abbildung 4.12: Linien gleicher Gesamtverstärkung der Quelle für $\mu_p = 1.5, 2, 3$ und 5 bei der Elliptizität von $f = 0.6$. Sie zeigen deutlich die keulenförmigen Gebiete hoher Verstärkung außerhalb von Spitzen. Grenzlinie und Kaustik sind als dickere Linien eingetragen.

Gesamtverstärkung für die Werte $\mu_p = 1.5, 2, 3$ und 5 . Sie sind mit Hilfe des Gittersuchverfahrens, das im Anhang D beschrieben wird, ermittelt. In ihr können wir am konkreten Beispiel der SIE-Linse den keulenförmigen Bereich höherer Verstärkung um die Spitze erkennen, den wir im Abschnitt 2.3 nur motiviert haben. Den Grenzlinien-Wirkungsquerschnitt, also die von dieser Linie umschlossene Fläche, können wir leider nicht mehr integralfrei darstellen. Er lautet, wenn wir $y_2(\phi) = \frac{1}{f'} \arcsin(f' \sin \phi)$ und $\frac{d}{d\phi} y_1(\phi) = \sin \phi / \sqrt{\cos^2 \phi + f'^2 \sin^2 \phi}$ verwenden:

$$\begin{aligned} \sigma_g &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_2 \frac{dy_1}{d\phi} d\phi = \frac{4}{f'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \phi \arcsin(f' \sin \phi)}{\sqrt{\cos^2 \phi + f'^2 \sin^2 \phi}} d\phi = \\ &= 4 \int_f^1 y_2(\Delta) \frac{dy_1}{d\Delta} d\Delta = \frac{4}{f'^2} \int_f^1 \frac{\arccos \Delta}{\sqrt{\Delta^2 - f'^2}} d\Delta \quad . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dabei ist noch $y_2(\Delta) = \frac{1}{f'} \arccos \Delta$ und $\frac{d}{d\Delta} y_1(\Delta) = 1/(f' \sqrt{\Delta^2 - f'^2})$ ausgenutzt. Der Grenzlinien-Wirkungsquerschnitt entspricht, wie wir das schon für die Multipolentwicklung festgestellt haben, im wesentlichen ($f \gtrsim 0.4$) dem Querschnitt für Mehrfachabbildungen der Quelle. Für den Kaustik-Wirkungsquerschnitt, der den für vier Bilder wiedergibt

(ebenfalls nur für $f \gtrsim 0.4$), erhalten wir durch Auswerten der selben Integrale wie im Fall der Grenzlinie

$$\begin{aligned} \sigma_k &= f' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{f' \sin^2(2\phi)}{(\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi)^2} - \frac{2 \sin(2\phi) \cos \phi \arcsin(f' \sin \phi)}{(\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \right] d\phi = \\ &= 4 \frac{4}{f'^2} \int_f^1 \left(\arccos \Delta - \frac{\sqrt{1 - \Delta^2}}{\Delta} \right) \frac{\sqrt{\Delta^2 - f^2}}{\Delta^2} d\Delta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Wirkungsquerschnitte σ_g und σ_k sind in Abb. 4.13 dargestellt. Außerdem zeigt diese Abbildung noch die relative Abweichung der entsprechenden Querschnitte der SIE-M1-Linse von denen der exakten Lösung. Darin finden wir das Ergebnis bestätigt, das wir aufgrund von Abb. 4.9 erwarten können. Während nämlich der Grenzlinien-Wirkungsquerschnitt sehr gut durch die lineare Entwicklung approximiert wird, unterschätzen wir σ_k für stärkere Elliptizitäten als $f = 0.4$ um mehr als zehn Prozent.

Zum Abschluß dieses Paragraphen beantworten wir noch die Frage, wie sehr der Wirkungsquerschnitt für Mehrfachabbildungen—den wir für $f \gtrsim 0.4$ als übereinstimmend mit dem Grenzlinien-Wirkungsquerschnitt erkannt haben—abnimmt, wenn wir für das zweite Bild eine gewisse Mindestverstärkung fordern. Wir nennen diesen Querschnitt $\sigma(|\mu_2| \geq \mu_{\min})$, wobei $\mu_2 < 0$ die Verstärkung dieses zweiten Bildes bezeichnet. Es gilt also $\sigma(|\mu_2| \geq 0) = \sigma_g$. Dieser Wirkungsquerschnitt wird beim Vergleich mit denen des nichtsingulären Modells (fünftes Kapitel) Bedeutung erlangen. Zu dessen Bestimmung bilden wir die Ellipse $r = \mu_2 / ((\mu_2 - 1)\Delta)$, innerhalb derer $|\mu_2| < \mu_{\min}$ gilt, mit Hilfe der Linsengleichung in die Quellenebene ab. $\sigma(|\mu_2| > \mu_{\min})$ ist dann die von dieser Linie umschlossene Fläche. Sie ist wie σ_g nur numerisch zugänglich. Abb. 4.14 stellt diesen Wirkungsquerschnitt graphisch dar. Er zeigt die zu erwartende empfindliche Abhängigkeit von μ_{\min} .

Komplexe Darstellung, Außenlösung. In diesem Paragraphen wollen wir die SIE-Linse in der komplexen Form darstellen, die im Anhang C eingeführt wird. Sie ist besonders dazu geeignet, Massenverteilungen mit elliptischer Symmetrie zu diskutieren, und wir werden sehen, daß sich der Ablenkwinkel der SIE-Linse in sehr prägnanter Form schreiben läßt. Außerdem können wir in dieser Form der Linsentheorie das Problem der divergierenden Masse der SIE-Linse, das wir schon im Abschnitt 4.1 erwähnt haben, lösen.

Wir verwenden die Materiedichte

$$\kappa(b) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{für } b \leq b_0 \\ 0 & \text{für } b > b_0 \end{cases} \quad .$$

Darin bezeichnet b , wie im Anhang C, die kleinen Halbachsen von Ellipsen konstanter Flächenmassendichte. Für $b \leq b_0$ oder für den Fall $b_0 \rightarrow \infty$ erhalten wir den Ablenkwinkel

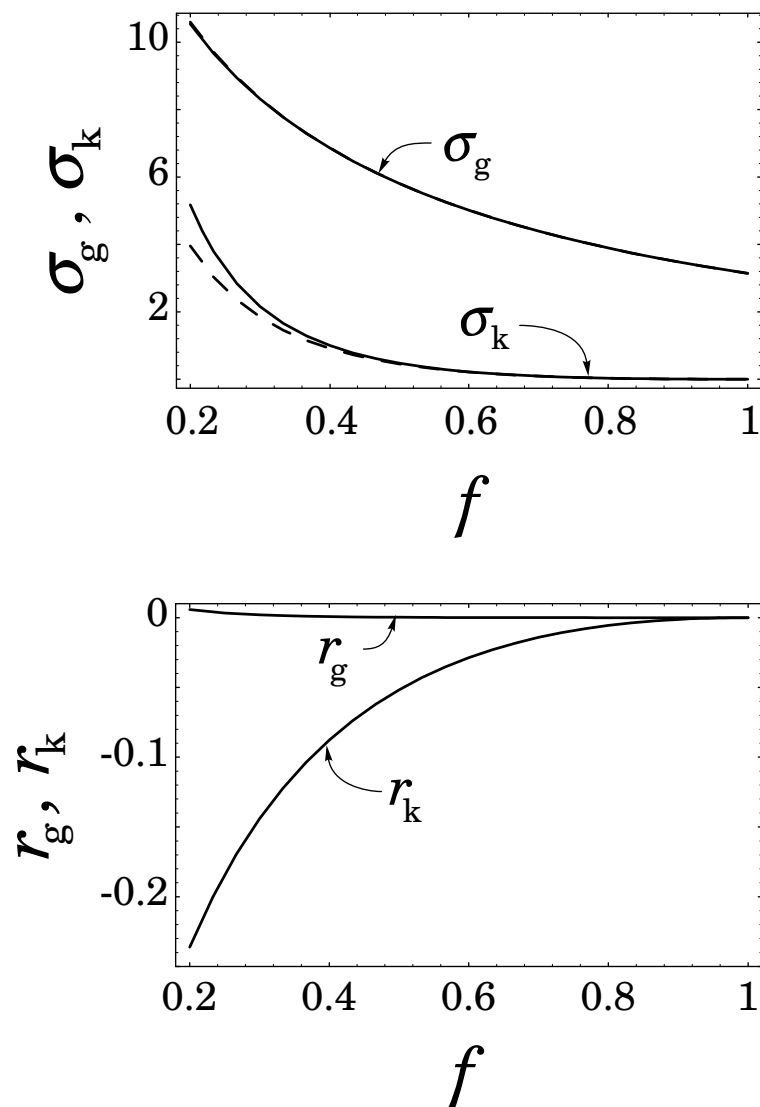


Abbildung 4.13: Die Wirkungsquerschnitte σ_g und σ_k für die SIE-Linse. Gestrichelt sind die entsprechenden Wirkungsquerschnitte $\sigma_{g,k}^{(1)}$ der SIE-M1-Linse eingetragen (Die Graphen von σ_g und $\sigma_g^{(1)}$ liegen fast exakt übereinander.). Außerdem zeigt diese Abbildung die relative Abweichung $r_{g,k} := \sigma_{g,k}^{(1)}/\sigma_{g,k} - 1$ der Querschnitte der SIE-M1-Linse von denen der exakten Lösung.

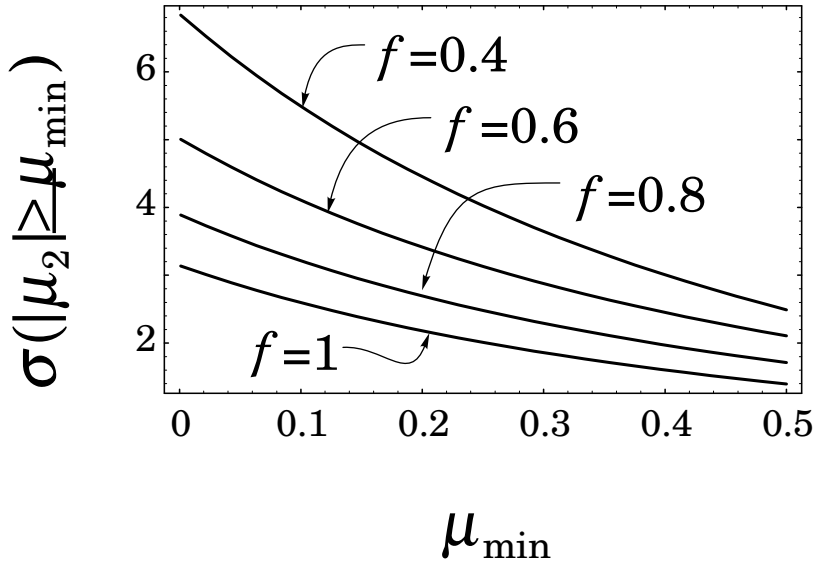


Abbildung 4.14: $\sigma(|\mu_2| \geq \mu_{\min})$ in Abhängigkeit von μ_{\min} . Wie auch im Fall der SIS-Linse hängt dieser Wirkungsquerschnitt empfindlich von μ_{\min} ab.

des SIE-Linsenmodells und für $b > b_0$ ein Ergebnis, das wir als *Außenlösung* der SIE-Linse bezeichnen werden. Dieses Modell besitzt eine endliche Gesamtmasse $m(b_0) = \frac{b_0}{f}$, wobei m die durch π geteilte Masse bezeichnet. Sie läßt sich, wie wir das auch schon im Abschnitt 4.1 erwähnt haben, am leichtesten in den nichtorthogonalen elliptischen Koordinaten des Anhangs C bestimmen. Mit Hilfe von Gl. (C.3) erhalten wir den (komplexen) Ablenkwinkel dieses Linsenmodells:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) &= \frac{1}{f'} \operatorname{arsinh} \frac{f'b}{f\mathbf{x}} && \text{für } b \leq b_0 \\ l(\mathbf{x}) &= \frac{1}{f'} \operatorname{arsinh} \frac{f'b_0}{f\mathbf{x}} && \text{für } b > b_0 \end{aligned} .$$

Es sei hier noch einmal ausdrücklich erwähnt, daß die Ellipse mit der kleinen Halbachse b durch \mathbf{x} und \mathbf{x}^* bestimmt wird. Es gilt nämlich $b^2 = r^2 \Delta^2 = x_1^2 + f^2 x_2^2 = \frac{f'^2}{4} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^{*2}) + \frac{1+f^2}{2} \mathbf{x}\mathbf{x}^*$. Mit der Tatsache, daß $s = \sinh \sigma \cos \tau$ und $t = \cosh \sigma \sin \tau$ in der Gleichung $\sigma + i\tau = \operatorname{arsinh}(s + it)$ ist, erkennen wir die Übereinstimmung der komplexen Lösung für $b \leq b_0$ mit dem reellen Ablenkwinkel der SIE-Linse. Dazu schreiben wir das Argument des Areasinus Hyperbolicus von $l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ in die Form $f'b/(f\mathbf{x}) = \frac{f'\Delta}{f} \exp(-i\phi) = \frac{f'\Delta}{f} (\cos \phi - i \sin \phi)$ um. Mit Hilfe des reellen Ablenkwinkels der SIE-Linse, Gl. (4.5), setzen wir $\sigma =$

$f'\alpha_1 = \operatorname{arsinh}\left(\frac{f'}{f} \cos \phi\right) = \operatorname{arcosh} \frac{\Delta}{f}$ und $\tau = -f'\alpha_2 = -\arcsin(f' \sin \phi) = -\arccos \Delta$. Wir erhalten $s = \frac{f'\Delta}{f} \cos \phi$ und $t = -\frac{f'\Delta}{f} \sin \phi$, also das obige Argument des Areasinus Hyperbolicus.

Außerdem gilt $(1 \pm t)^2 + s^2 = (\cosh \sigma \pm \sin \tau)^2$, was uns mit $s = a \cos \phi$ und $t = -a \sin \phi$ die Aufspaltung des komplexen Ablenkungswinkels der Außenlösung in Real- und Imaginärteil erlaubt. Er lautet

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{f'} \operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \phi} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + a^2 + 2a \sin \phi} \right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{f'} \arcsin \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 + a^2 + 2a \sin \phi} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \phi} \right) \quad ,\end{aligned}$$

wobei wir $a := \frac{f'b_0}{fr}$ gesetzt haben. Die reelle Außenlösung schließt stetig an den Ablenkungswinkel (4.5) der SIE-Linse an. Dies folgt aus der Äquivalenz der reellen mit der komplexen Innenlösung und der Stetigkeit im komplexen Fall, die unmittelbar zu sehen ist.

Da der komplexe Ablenkungswinkel der Außenlösung eine analytische Funktion ist, können wir ihn entwickeln:

$$l(\mathbf{x}) = \frac{1}{f'} \operatorname{arsinh} \frac{f'b_0}{f\mathbf{x}} = \frac{b_0}{f\mathbf{x}} + \mathcal{O}(\mathbf{x}^{-3}) = \frac{m(b_0)}{\mathbf{x}} + \mathcal{O}(\mathbf{x}^{-3}) \quad .$$

Das bedeutet, daß der Ablenkungswinkel der Außenlösung für sehr großes $|\mathbf{x}| = r$ in den einer Punktmasse $m(b_0)$ übergeht.

Für die SIE-Linse in der komplexen Darstellung muß gelten³:

$$\kappa = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}^*} = \frac{1}{2b} \frac{\operatorname{sgn} \mathbf{x}}{\sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b^2}} \frac{\partial b^2}{\partial \mathbf{x}^*} \quad .$$

Dies liefert uns eine nützliche Beziehung für die SIE-Linse, nämlich $(b^2)_{,x^*} = x_1 + i f^2 x_2 = \operatorname{sgn} \mathbf{x} \sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b^2}$. Dabei verwenden wir den durch Komma abgetrennten Index als Kurzschreibweise für die Wirtinger-Ableitung. Damit können wir den Ausdruck für die Scherung der SIE-Linse vereinfachen:

$$\Gamma^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{(b^2)_{,x^*}} \frac{2b^2 - \mathbf{x}(b^2)_{,x}}{2b\mathbf{x}} = -\kappa \frac{\mathbf{x}^*}{\mathbf{x}} \quad .$$

Für die letzte Gleichung haben wir die Beziehung $2b^2 - \mathbf{x}(b^2)_{,x} = \mathbf{x}^*(b^2)_{,x^*}$ verwendet, die durch komponentenweises Nachrechnen bestätigt werden kann. Außerdem erkennen wir unmittelbar die Übereinstimmung der komplexen Scherung $\Gamma = -\kappa \mathbf{x} \mathbf{x}^{*-1} = -\kappa \exp(2i\phi) = -\kappa (\cos(2\phi) + i \sin(2\phi)) = \gamma_1 + i \gamma_2$ mit der Scherung der reellen Lösung. Für die Scherung der Außenlösung erhalten wir

$$\Gamma^*(\mathbf{x}) = -\frac{b_0}{\sqrt{f^2 \mathbf{x}^4 + f'^2 b_0^2 \mathbf{x}^2}} \quad .$$

Sie verschwindet offensichtlich für $r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

³Die Funktion $\operatorname{sgn} \mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{x}^2}/\mathbf{x}$ wird im Anhang C näher erläutert.

Kapitel 5

Nichtsinguläre isotherme Linsenmodelle

In diesem Kapitel wollen wir die Flächenmassendichte der SIE-Linse im Linsenzentrum so verändern, daß sie nicht mehr divergiert. Diese Linse wird analytisch ungleich schwieriger zu handhaben sein. Dies rechtfertigt natürlich auch im nachhinein, daß wir ein „unphysikalisches“, singuläres Modell überhaupt diskutiert haben. Ansonsten werden wir ähnlich wie im vierten Kapitel vorgehen. Im Abschnitt 5.1 wollen wir zunächst auf den rotationssymmetrischen Fall der *nichtsingulären isothermen Sphäre* oder kurz *NIS-Linse* betrachten. Dann verallgemeinern wir wiederum das Linsenmodell auf elliptische Symmetrie, wobei wir uns hier im Gegensatz zum singulären Fall nahezu völlig auf das exakt elliptische Linsenmodell, das *nichtsinguläre isotherme Ellipsoid* oder die *NIE-Linse* beschränken. Für die radiale Abhängigkeit der Materiedichte verwenden wir die im Abschnitt 4.1 diskutierte Beziehung $\kappa \propto (r^2 + r_c^2)^{-1/2}$.

5.1 Die nichtsinguläre isotherme Sphäre

Wir widmen uns nun dem rotationssymmetrischen Linsenmodell, der nichtsingulären isothermen Sphäre oder NIS-Linse. Die Quellposition $\mathbf{y} \neq 0$ zeichnet wie für den singulären Fall eine besondere Raumrichtung aus, so daß wir wiederum alle vektoriellen Größen auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_y = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ beziehen können. Wir spezialisieren die im Abschnitt 8.1.1 von [Schneider et al. 1992] gemachten Überlegungen für beliebige rotationssymmetrische Linsen auf unsere Flächenmassendichte

$$\kappa(r) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 + r_c^2}} \quad ,$$

wobei $r = |\mathbf{x}|$ ist. Für die durch π geteilte (dimensionslose) Gesamtmasse der Linse innerhalb eines Kreises mit Radius r erhalten wir

$$m(r) = 2 \int_0^r r' \kappa(r') dr' = \sqrt{r^2 + r_c^2} - r_c \quad ,$$

woraus wir für den Ablenkwinkel

$$\alpha(x) = \frac{m(r)}{x} = \frac{1}{x} \sqrt{r^2 + r_c^2} - \frac{r_c}{x}$$

erhalten. Darin x ist durch $x := \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_y$ definiert, kann also im Vergleich zu $r = |\mathbf{x}| = |x|$ auch negativ sein. Die Linsengleichung lautet daher

$$y = x + \frac{r_c}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{r^2 + r_c^2} \quad .$$

Für das Ablenkpotehtial finden wir durch Integration von $\alpha(x)$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \sqrt{r^2 + r_c^2} - r_c \ln(r_c + \sqrt{r^2 + r_c^2}) = \\ &= \sqrt{r^2 + r_c^2} - r_c \operatorname{arsinh} \frac{r_c}{r} - r_c \ln r \quad . \end{aligned}$$

Für die Scherung und die Determinante der Verstärkungsmatrix erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, \phi) &= \cos(2\phi) \left(\kappa(r) - \frac{m(r)}{r^2} \right) \\ \gamma_2(r, \phi) &= \sin(2\phi) \left(\kappa(r) - \frac{m(r)}{r^2} \right) \\ \gamma^2 &= \left(\kappa - \frac{m}{r^2} \right)^2 \\ \det A &= \left(1 - \frac{m}{r^2} \right) \left(1 - \frac{d}{dr} \frac{m}{r} \right) \quad . \end{aligned}$$

Wir erhalten also zwei kritische Kreise, nämlich dann, wenn die Bedingungen $\frac{m}{r^2} = 1$ oder $\frac{d}{dr} \frac{m}{r^2} = 1$ erfüllt sind. Erstere heißt *tangentiale kritische Kurve* und wird, wie wir leicht aus der Linsengleichung ablesen können, auf den Ursprung der Quellenebene abgebildet. Ist die zweite Bedingung erfüllt, so sprechen wir von der *radialen kritischen Kurve*. Die Bezeichnungen „tangential“ und „radial“ rühren von der Lage des Eigenvektors der Verstärkungsmatrix zum Eigenwert null her. Die Lösung der Bedingung für die radiale kritische Linie führt uns auf ein Polynom zweiten Grades in r^2 , dessen physikalisch relevante Lösung durch die Gleichung

$$r_r^2 = \frac{1}{2}(2r_c - r_c^2 - r_c \sqrt{r_c^2 + 4r_c})$$

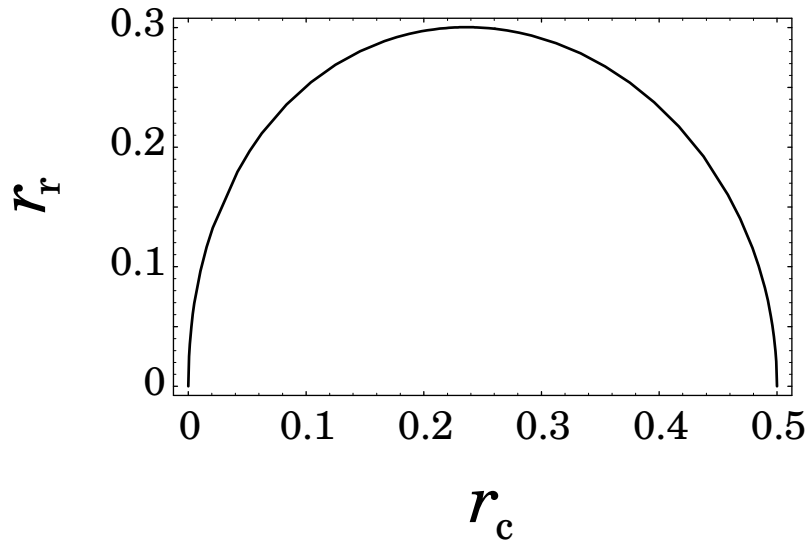


Abbildung 5.1: Der Radius der radialen kritischen Linie in Abhängigkeit des Kernradius r_c . Sie liegt immer innerhalb der tangentialen kritischen Linie.

beschrieben wird. Abb. 5.1 zeigt r_r in Abhängigkeit des Kernradius r_c . Dabei ist der interessierende Parameterbereich zwischen $r_c = 0$, dem Fall der SIS-Linse, und $r_c = 0.5$ dargestellt. Für Kernradien größer als 0.5 existieren keine kritischen Linien mehr—die Linse ist unterkritisch. Das Verhalten der (radialen) Kaustik $y_r = |y(r_r)|$ ist in Abb. 5.2 abgebildet. Es zeigt sich darin, daß der Radius dieser ebenfalls kreisförmigen Kaustik empfindlich von der Größe des Kernradius abhängt. Die Bedeutung dieses Umstands wollen wir an einem Zahlenbeispiel diskutieren. Wir vergleichen den Wirkungsquerschnitt für Mehrfachabbildungen einer NIS-Linse mit $r_c = 0.02$ (Dies bedeutet wegen $\Sigma_0/\Sigma_{cr} = 1/(2r_c)$, daß die zentrale Dichte die kritische Dichte um den Faktor 25 übersteigt.) mit dem der SIS-Linse. In diesem Fall haben wir $y_r \simeq 0.73$, was dazu führt, daß der angesprochene Wirkungsquerschnitt beim Einführen des Kernradius auf ungefähr 53 Prozent des ursprünglichen schrumpft. Daher ist der Grenzlinien-Wirkungsquerschnitt als Maß für Mehrfachabbildungen nicht geeignet. Er liefert nur eine obere Schranke. Andererseits ist das zweite Bild aber in einem großen Teil des Grenzlinien-Wirkungsquerschnitts sehr schwach. Wir können uns fragen, wie groß der Verstärkungsfaktor für dieses zweite Bild mindestens sein muß, um den Wirkungsquerschnitt „Mindestverstärkung des zweiten Bildes der SIS-Linse“ an den für Mehrfachabbildungen im Fall der NIS-Linse anzugleichen. Er ist 0.37, wobei wir die negative Parität unberücksichtigt lassen. Da der Verstärkungsfaktor des anderen Bildes um zwei größer ist, ist dieses zweite Bild immer noch etwa sechs Mal

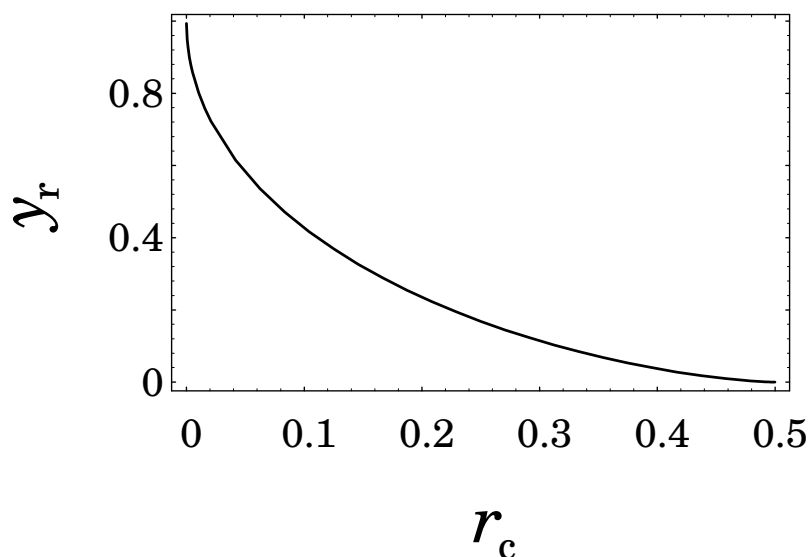


Abbildung 5.2: $y_r = |y(r_r)|$ als Funktion des Kernradius r_c . Der Betrag von y_r bestimmt den Radius der kreisförmigen radialen Kaustik.

schwächer als das andere.

Der Radius der tangentialen kritischen Linie ergibt sich als Nebenprodukt beim Auflösen der Linsengleichung. Quadrieren wir die Linsengleichung, so ergibt sich ein Polynom dritten Grades in x , nämlich

$$x^3 - 2yx^2 + (y^2 - 1 + 2r_c)x - 2r_cy = 0 \quad .$$

Qualitativ können wir das Verhalten der Lösungen dieser Gleichung diskutieren, während eine explizite Darstellung davon recht unübersichtlich ist. Das erste Bild verhält sich genauso wie im singulären Fall. Es liegt auf der selben Seite des Linsenzentrums wie die Quelle und nähert sich bei der Bewegung der Quelle hinter das Linsenzentrum von „außen“ an die tangentielle kritische Linie an. Im Gegensatz zur SIS-Linse entstehen aber dann, wenn die Quelle die radiale Kaustik überschreitet, anstatt des dort beobachteten zweiten Bildes zwei hoch verstärkte Bilder „innerhalb“ und „außerhalb“ der zugehörigen Kaustik und auf der der Quelle gegenüberliegenden Seite des Linsenzentrums. Diese beiden Lösungen x sind also negativ. Das innerhalb gelegene Bild bewegt sich bei der Annäherung der Quelle an den Ursprung auf denjenigen der Linsenebene zu, während das andere Bild sich von innen an die tangentielle kritische Linie annähert. Im Fall $y = 0$ erhalten wir wie für die SIS-Linse ein kreisförmiges Bild auf der tangentialen kritischen Kurve und—im Gegensatz zur SIS-Linse—ein weiteres am Ursprung der Linsenebene.

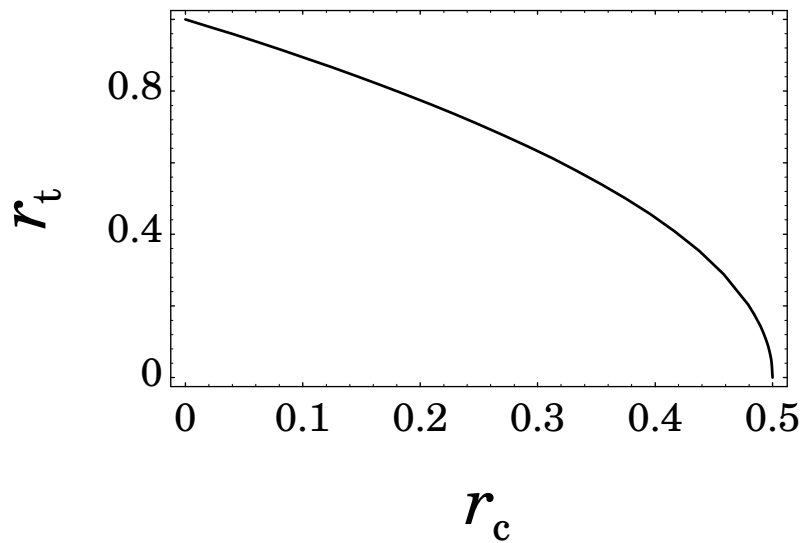


Abbildung 5.3: Der Radius r_t der tangentialen kritischen Linie.

Diese kritische Kurve ergibt sich leicht aus obigem Polynom, wenn wir $y = 0$ einsetzen. Der Radius der kritischen Linie ist dann durch

$$r_t = \sqrt{1 - 2r_c}$$

gegeben. Sein Verhalten in Abhängigkeit von r_c ist in Abb. 5.3 dargestellt.

5.2 Das nichtsinguläre isotherme Ellipsoid

Flächenmassendichte. Jetzt wollen wir ein Modell besprechen, das im Gegensatz zur SIE-Linse keine Dichtesingularität am Ursprung mehr besitzt. Wir nennen es nicht-singuläres isothermes Ellipsoid oder NIE-Linse. Dazu verwenden wir die schon im Abschnitt 4.1 diskutierte Flächenmassendichte

$$\kappa(b) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + b_c^2}},$$

wobei b die kleine Halbachse von Ellipsen konstanter Flächenmassendichte mißt. Wir werden in diesem Abschnitt durchweg die im Anhang C einzuführende komplexe Darstellung der Linsentheorie verwenden. b_c nennen wir weiterhin Kernradius. Die Elliptizität

$f \in]0, 1[$ und $f' = \sqrt{1 - f^2}$ benützen wir wie bisher. Der Grenzfall $f = 1$ führt genau wie im singulären Fall auf das rotationssymmetrische Modell, also auf die NIS-Linse, während $b_c = 0$ die SIE-Linse ergibt.

Linsengleichung. Integrieren wir Gl. (C.3) mit obiger Dichte, so erhalten wir als komplexen Ablenkswinkel eine Linearkombination von inversen hyperbolischen Funktionen, nämlich

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \frac{\operatorname{sgn} \mathbf{x}}{f'} \left[\operatorname{arsinh}(\Xi \sqrt{b^2 + b_c^2}) - \operatorname{arsinh}(\Xi b_c) \right]$$

$$\text{mit } \Xi(\mathbf{x}) := \frac{f'}{\sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 - f'^2 b_c^2}}$$

$$\text{und } b^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \frac{f'^2}{4} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^{*2}) + \frac{1+f^2}{2} \mathbf{x} \mathbf{x}^* .$$

Zur Vereinfachung des Ausdrucks haben wir dabei die Beziehung $\arccos(2z^2 - 1) = \frac{\pi}{2} - i \operatorname{arsinh} z$ ausgenutzt. Setzen wir $b_c = 0$, so ist $\Xi(\mathbf{x}) = f' \operatorname{sgn} \mathbf{x} / (f \mathbf{x})$, und wir erhalten den komplexen Ablenkswinkel der SIE-Linse. Bereits hier ist die wesentlich kompliziertere Struktur des Ablenkswinkels der NIE-Linse im Vergleich zu dem der SIE-Linse zu erkennen. Diese Komplexität ist es auch, die der analytischen Untersuchung dieses Linsenmodells enge Grenzen setzt.

Scherung. Die komplexe Scherung Γ , wie wir sie im Anhang C definieren werden, erhalten wir daraus durch Ableiten des komplexen Ablenkswinkels:

$$\Gamma^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} = \kappa \frac{(b^2)_{,x}}{(b^2)_{,x^*}} + \frac{f}{f^2 \mathbf{x}^2 - f'^2 b_c^2} \left(b_c - \frac{f \mathbf{x} \sqrt{b^2 + b_c^2}}{(b^2)_{,x^*}} \right) .$$

Dabei bezeichnet der mit Komma abgetrennte untere Index die komplexe Ableitung nach den Regeln des Wirtinger-Kalküls, wie wir es schon im Abschnitt 4.4 verwendet haben. Außerdem haben wir die im Abschnitt 4.4 hergeleitete Beziehung $(b^2)_{,x^*} = \operatorname{sgn} \mathbf{x} \sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b^2}$ und die Ableitung von Ξ nach \mathbf{x} , $\Xi_{,x} = -\frac{f^2}{f'^2} \mathbf{x} \Xi^3$, verwendet. Im Grenzfall $b_c \rightarrow 0$ erhalten wir die Scherung der SIE-Linse. Der recht komplizierte Ausdruck für die Scherung wird dann einfacher, wenn wir uns auf die Koordinatenachsen beschränken. Drücken wir ihn in Abhängigkeit der Flächenmassendichte κ aus, so ergibt sich für die Scherung auf der positiven 1-Achse ($\mathbf{x} = b$ und $(b^2)_{,x} = (b^2)_{,x^*} = b$) die Beziehung

$$\Gamma = \gamma_1 = \kappa - \frac{2f\kappa}{f + 2b_c\kappa}$$

und auf der positiven 2-Achse ($\mathbf{x} = i \frac{b}{f}$ und $(b^2)_{,x^*} = -(b^2)_{,x} = i f b$)

$$\Gamma = \gamma_1 = \frac{2\kappa}{1 + 2b_c f \kappa} - \kappa .$$

Diese Gleichungen werden uns im folgenden Paragraphen nützlich sein, um die Frage zu beantworten, welche kritischen Linien beziehungsweise welche Kaustiken die NIE-Linse für eine bestimmte Wahl der Parameter f und b_c aufweist.

Kritische Linien, Kaustiken. Dazu bestimmen wir zunächst die Schnittpunkte der kritischen Linien mit der 1-Achse. $D = (1 - \kappa)^2 - \gamma^2$ liefert uns zusammen mit der Sche- rung auf der 1-Achse ein Polynom dritten Grades für diese Punkte, das sich faktorisieren läßt:

$$D(f + 2b_c\kappa)^2 = (f + 2b_c\kappa - 2f\kappa)(f + 2b_c\kappa - 4b_c\kappa^2) \quad .$$

Der aus dem Produkt $D(f + 2b_c\kappa)^2$ zu erwartende Term vierter Ordnung in κ verschwin- det. Die Nullstellen dieser Gleichung ergeben die Flächenmassendichten, an denen die kritischen Linien die 1-Achse schneiden. Für den Fall $b_c = 0$ erhalten wir in Überein- stimmung mit dem Ergebnis aus dem vorangegangenen Kapitel die Lösung $\kappa = \frac{1}{2}$. Sonst ergeben sich zwei Lösungen

$$\kappa_1 = \frac{f}{2(f - b_c)} ; \quad \kappa_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4f}{b_c}} \right) \quad ,$$

weil die quadratische Gleichung nur eine Lösung mit $\kappa > 0$ liefert. Da die Materiedich- te den Wert $\frac{1}{2b_c}$, die maximale Flächenmassendichte der NIE-Linse, nicht überschreiten darf, finden wir einschränkende Bedingungen an die Parameter f und b_c für die Existenz der jeweiligen kritischen Linien bzw. der zugehörigen Kaustiken. Für diejenige kritische Kurve, die wir „äußere“ oder „erste kritische Kurve“ nennen wollen, erhalten wir die Be- dingung $b_c \leq \frac{1}{1+f}$ —das heißt für Kernradien, die dieser Einschränkung nicht gehorchen, gibt es diese kritische Linie und die „erste Kaustik“ nicht. Diese kritische Kurve schneidet die 1-Achse in dem Punkt, der durch κ_1 gegeben ist, solange $b_c \leq \frac{f}{2}$ gilt. Sonst ist dieser Punkt durch κ_2 gegeben. Da κ_1 im Grenzübergang $b_c \rightarrow 0$ gegen den Wert $\frac{1}{2}$ strebt, ent- spricht diese kritische Kurve der der SIE-Linse. Die erste Kaustik muß dementsprechend im Limes kleiner Kernradien die vier Spitzen wie die der SIE-Linse aufweisen. Für die „in- nere“ oder „zweite kritische Kurve“ finden wir aufgrund der selben Bedingung $b_c \leq \frac{f}{1+f}$. Sie hört also zusammen mit der „zweiten Kaustik“ schon bei kleineren Kernradien auf zu existieren. Im Grenzübergang $b_c \rightarrow 0$ strebt diese kritische Linie gegen den Ursprung der Linsenebene und die Kaustik gegen die Grenzlinie der SIE-Linse. Für kleine Kernradien ist die zweite Kaustik also frei von Spitzen.

Eine besondere Situation ergibt sich für den Fall $b_c = \frac{f}{2}$, für den beide kritische Kurven existieren. Dann fallen nämlich $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ zusammen. Außerdem erfüllt die- ser Punkt auf der 1-Achse die Bedingung $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, wodurch beide Eigenwerte der Verstärkungsmatrix verschwinden. Wir erhalten dort also eine im Abschnitt 2.3 nur kurz angedeutete Katastrophe höherer Ordnung. Es handelt sich dabei um einen hyperboli- schen Nabel. Aus dem Verschwinden der Verstärkungsmatrix folgt $\nabla D = 0$, was wir

anhand des koordinatenabhängigen Ausdrucks aus Abschnitt 2.3 erkennen können. Das ermöglicht, daß sich die beiden kritischen Linien im Bildpunkt des hyperbolischen Nabels berühren. Zusätzlich werden bei dieser Katastrophe zwei Spitzen von der ersten Kaustik auf die zweite übertragen. Beide Kaustiken erhalten daher für den Fall $b_c > \frac{f}{2}$ eine topologische Struktur, die in der Katastrophentheorie anschaulich Lippen genannt wird. Die Spitzen der ersten Kaustik liegen auf der 2-Achse, während sich die der zweiten Kaustik auf der 1-Achse befinden. Die zweite Kaustik wird vollständig von der ersten umschlossen. Das gleiche gilt für die kritischen Kurven—dies ist im Gegensatz zu den Kaustiken aber eine Eigenschaft, die unabhängig von der Wahl der Linsenparameter f und b_c ist. Für größer werdendes b_c verschwinden dann zuerst die inneren Lippen ($b_c > \frac{f}{1+f}$) und später die äußeren ($b_c > \frac{1}{1+f}$).

Fassen wir die mit Hilfe des Grenzübergangs $b_c \rightarrow 0$ gewonnenen Ergebnisse zusammen, so stellen wir fest, daß der durch κ_1 festgelegte Schnittpunkt einer kritischen Linie mit der 1-Achse von der Linsengleichung auf eine Spitze abgebildet wird. Dieses Resultat ist auch rechnerisch zugänglich, wenn wir berücksichtigen, daß der Tangentialvektor an die kritische Linie aus Gründen der Symmetrie senkrecht auf die 1-Achse stehen muß. Es gilt also $\mathbb{T} \propto \mathbf{j}$. Dessen Abbild in der Quellenebene ist durch $(1 - \kappa)\mathbb{T} - \Gamma^*\mathbb{T}^*$ gegeben und außerdem im Falle einer Spitze gleich null. Daraus ergibt sich unmittelbar obige Behauptung.

Mit den Punkten, an denen die kritischen Linien die 2-Achse schneiden, können wir völlig analog verfahren. Die faktorisierte Gleichung für D lautet dann

$$D(1 + 2fb_c\kappa)^2 = (1 + 2b_c f\kappa - 2\kappa)(1 + 2b_c f\kappa - 4b_c\kappa^2) \quad ,$$

woraus sich

$$\kappa_1 = \frac{1}{2(1 - b_c f)} ; \quad \kappa_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{b_c f}} \right)$$

ergeben. Wie auch auf der 1-Achse sind die Spitzen die Abbilder der von κ_1 gegebenen kritischen Punkte.

Mit Hilfe von numerischen Verfahren¹ zur Nullstellenbestimmung von Funktionen können wir, ausgehend von den Schnittpunkten der kritischen Linien mit den Achsen, die gesamte kritische Kurve rekonstruieren. Abb. 5.4, Abb. 5.5 und Abb. 5.6 zeigen kritische Linien und Kaustiken für den Fall einer Elliptizität von $f = 0.8$.

Wirkungsquerschnitte. Jetzt wollen wir untersuchen, welchen Einfluß ein endlicher Kernradius auf die Wirkungsquerschnitte der Kaustiken verglichen mit den Entspre-

¹Die Abben. 5.4, 5.5 und 5.6 wurden mit Hilfe der Routine „FindRoot“ des Mathematik-Programmpakets „Mathematica 2.0“ erstellt. Diese Routine nutzt das Newtonsche Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Funktionen.

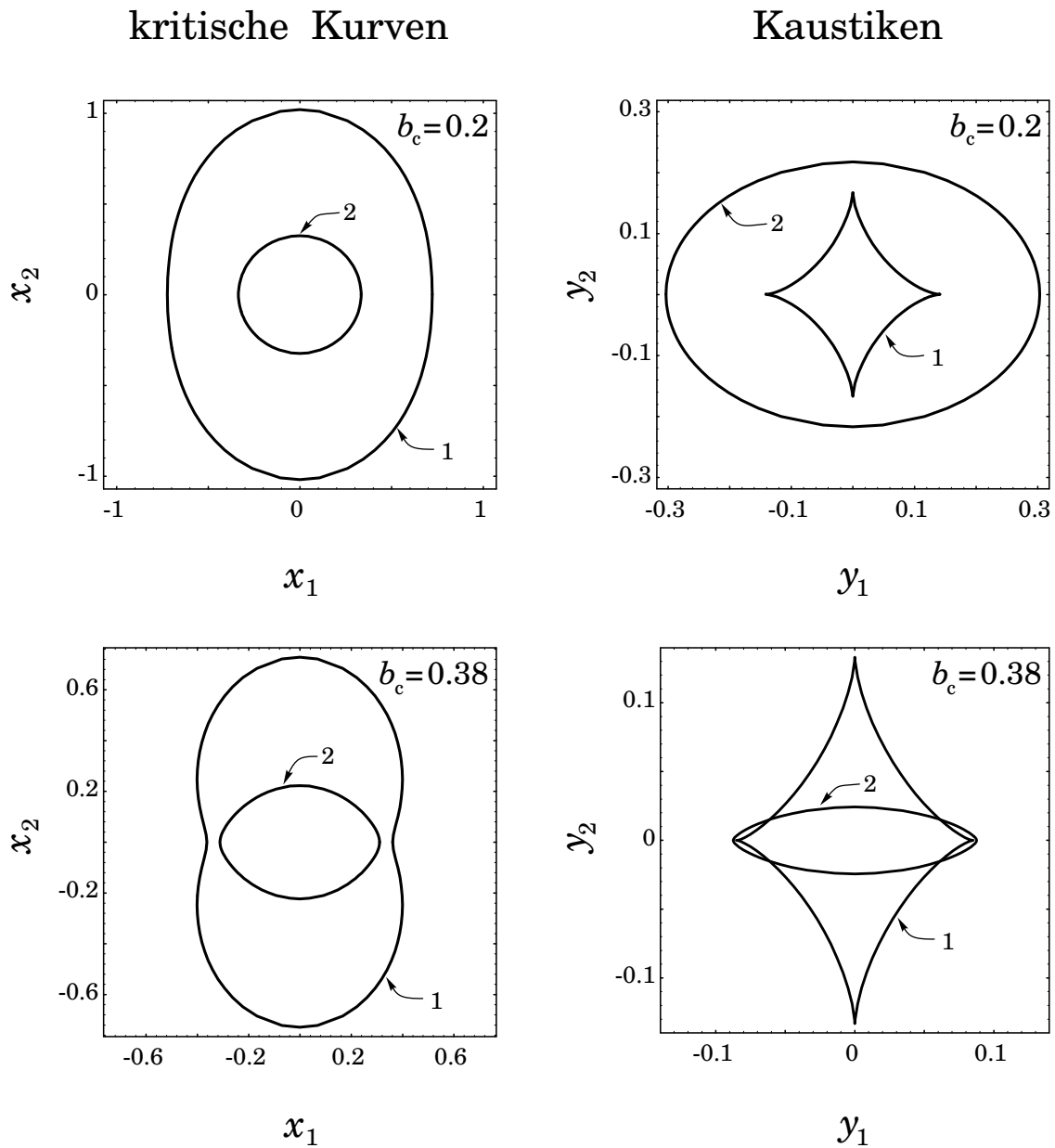


Abbildung 5.4: Kritische Linien und Kaustiken der NIE-Linse für eine Elliptizität von $f = 0.8$. Die Parameter f und b_c der NIE-Linse gehorchen in dieser Abbildung der Bedingung $b_c < \frac{f}{2}$, womit die Existenz beider kritischer Linien und Kaustiken gewährleistet ist. Die Nummern bei den kritischen Kurven und den Kaustiken beziehen sich auf die Bezeichnungen im Text.

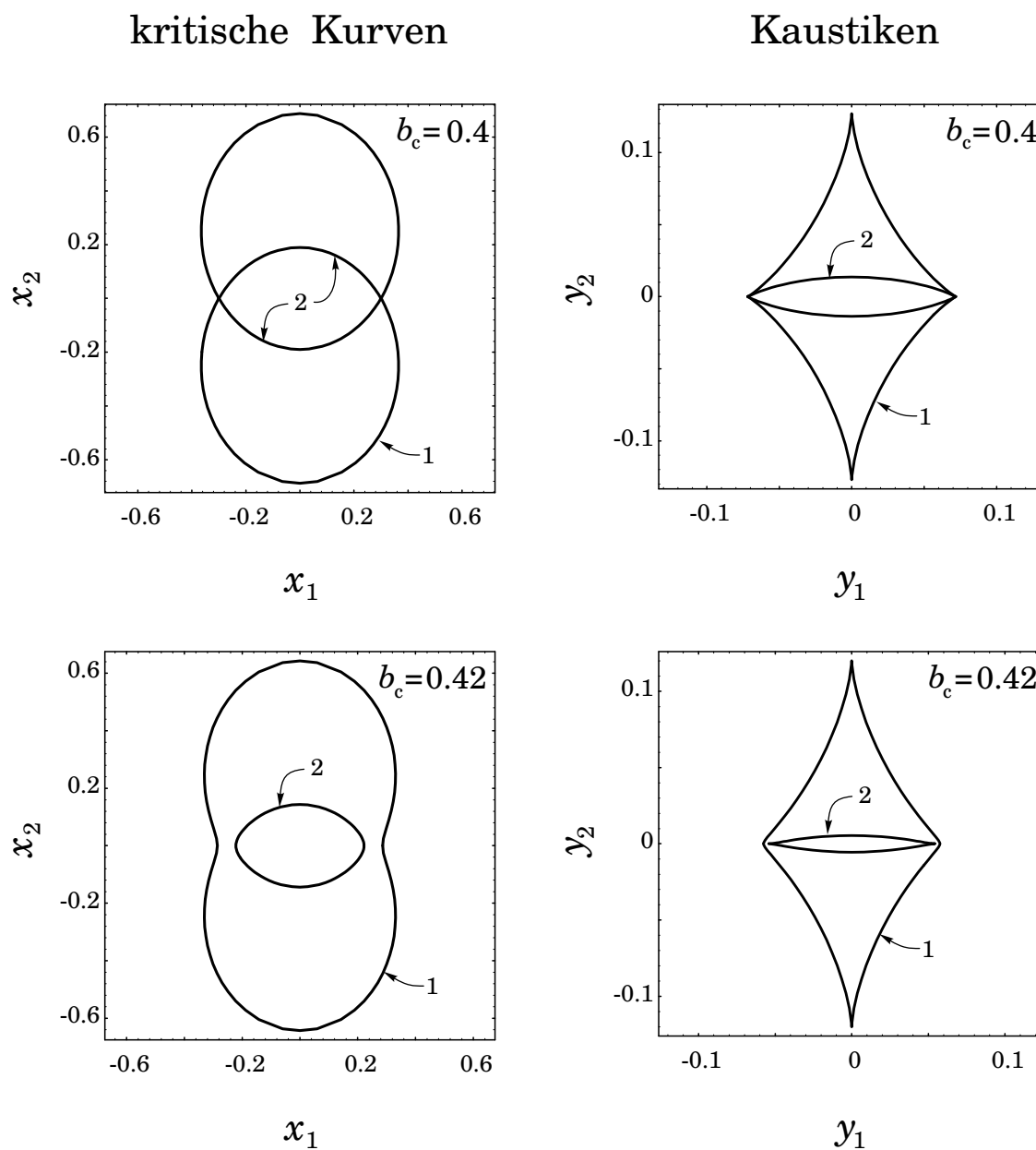


Abbildung 5.5: Kritische Linien und Kaustiken der NIE-Linse mit einer Elliptizität von $f = 0.8$. In der ersten Reihe gilt die Bedingung $b_c = \frac{f}{2}$, so daß die Kaustiken auf der 1-Achse einen hyperbolischen Nabel zeigen. Außerdem ist $b_c \leq \frac{f}{1+f}$ erfüllt, das heißt beide kritische Linien und Kaustiken existieren.

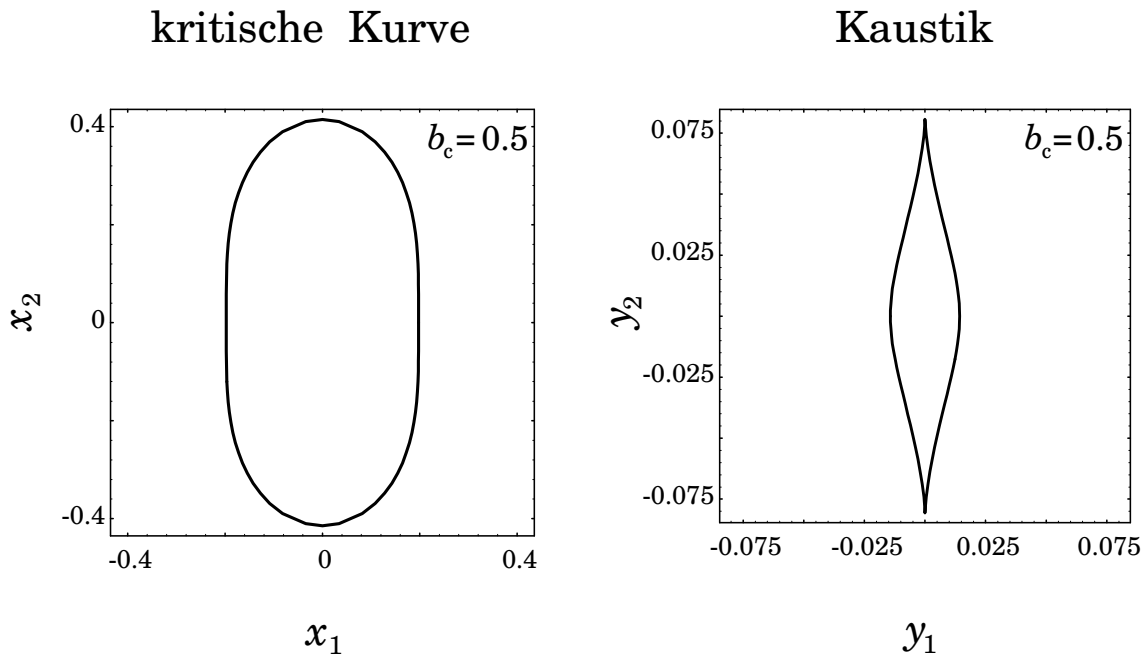


Abbildung 5.6: Kritische Linie und Kaustik der NIE-Linse ($f = 0.8$) im Parameterbereich $b_c \in]\frac{f}{1+f}, \frac{1}{1+f}]$, in dem nur die erste kritische Linie und Kaustik existieren.

chungen der SIE-Linse nimmt. Dort haben wir gesehen, daß der Grenzlinien-Wirkungsquerschnitt, der der Grenzfall des Wirkungsquerschnitts σ_2 der zweiten Kaustik für verschwindenden Kernradius ist, im wesentlichen dem für Mehrfachabbildungen entspricht. Dies gilt ebenfalls für die NIE-Linse. Ein Unterschied besteht allerdings darin, daß wir drei statt der zwei Bilder im singulären Fall erhalten. Der Wirkungsquerschnitt der ersten Kaustik entspricht dem Kaustik-Querschnitt der SIE-Linse mit dem gleichen Unterschied, im nichtsingulären Fall ein Bild mehr zu erhalten. Wir beschränken uns (willkürlich) auf den Parameterbereich $b_c \leq 0.1$, was für $f > 0.2$ gewährleistet, daß die Topologie der Kaustiken im Vergleich zu den Entsprechungen der SIE-Linse unverändert bleibt. Diese Einschränkung bedeutet, daß die zentrale Flächenmassendichte Σ_0 mindestens fünf mal so groß wie die kritische Dichte Σ_{cr} sein muß. Da sich die erste kritische Linie in einem Bereich der Linsenebene befindet, in dem sich die Flächenmassendichte der singulären und der NIE-Linse nicht mehr wesentlich unterscheiden, zeigt sich erwartungsgemäß, daß der Wirkungsquerschnitt σ_1 der ersten Kaustik (in dem oben genannten Parameterbereich) unabhängig vom Kernradius ist. Für den der zweiten Kaustik erhalten wir aber

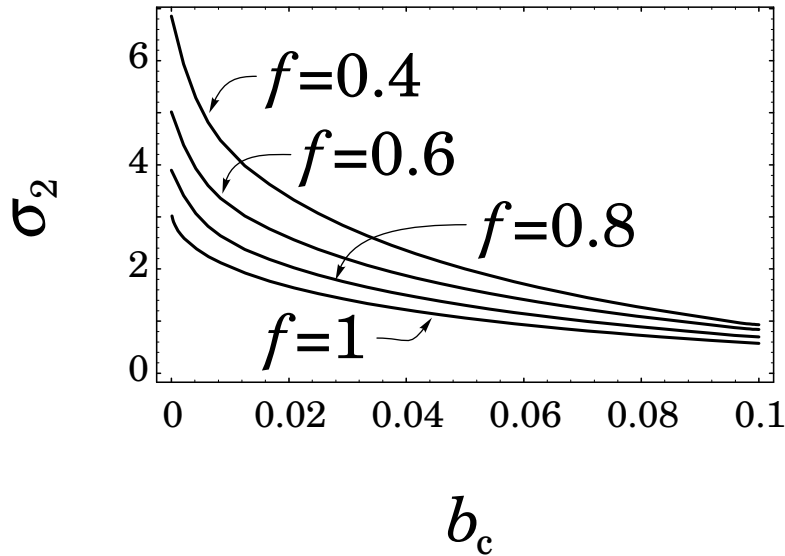


Abbildung 5.7: Wirkungsquerschnitt der zweiten Kaustik als Funktion des Kernradius b_c für die Elliptizitäten $f = 1, 0.8, 0.6$ und 0.4 .

eine starke Variation in Abhängigkeit des Kernradius b_c . Abb. 5.7 zeigt diese Abnahme der Fläche für zunehmenden Kernradius graphisch. Diese starke Verringerung des Wirkungsquerschnitts schon für kleine Kernradien ist ebenfalls leicht verständlich, wenn wir die Lage der zweiten kritischen Linie in Betracht ziehen. Sie befindet sich in einem Bereich der Linsenebene, dessen Materiedichte im wesentlichen vom Kernradius geprägt wird. Der direkte Vergleich von σ_2 mit $\sigma_g = \sigma_2(b_c = 0)$ der SIE-Linse berücksichtigt nicht, daß das zweite Bild im singulären Fall sehr schwach sein kann. Der Wirkungsquerschnitt $\sigma(|\mu_2| \geq \mu_{\min})$, der in Abb. 4.14 dargestellt ist, beinhaltet diese Eigenschaft und zeigt eine ähnlich drastische Abhängigkeit von μ_{\min} wie die des Querschnitts σ_2 von b_c . Daraus folgt, daß der Grenzlinien-Wirkungsquerschnitt im Falle eines endlichen Kernradius der Linse als Maß für Mehrfachabbildungen wenig geeignet ist. Er liefert nur eine obere Schranke für die Häufigkeit von Mehrfachabbildungen.

Abb. 5.8 zeigt neben den Kaustiken der NIE-Linse mit $f = 0.6$ und $b_c = 0.1$ noch Linien gleicher Gesamtverstärkung für $\mu_p = 1.5, 2, 3$ und 5 . Sie zeigt den selben Ausschnitt der Linsenebene wie Abb. 4.12. Daher können wir die beiden Abbildungen direkt vergleichen. Deutlich ist die Verkleinerung der zweiten Kaustik verglichen mit der Grenzlinie der SIE-Linse zu erkennen. Die Fläche mit $\mu_p \geq 1.5$ bleibt völlig unverändert, während die mit $\mu_p \geq 2$ und $\mu_p \geq 3$ kleiner ausfallen. Der Grund dafür ist, daß der Bereich mit Mehrfachabbildungen im singulären Fall sehr viel größer ist. Durch das Zusammenspiel

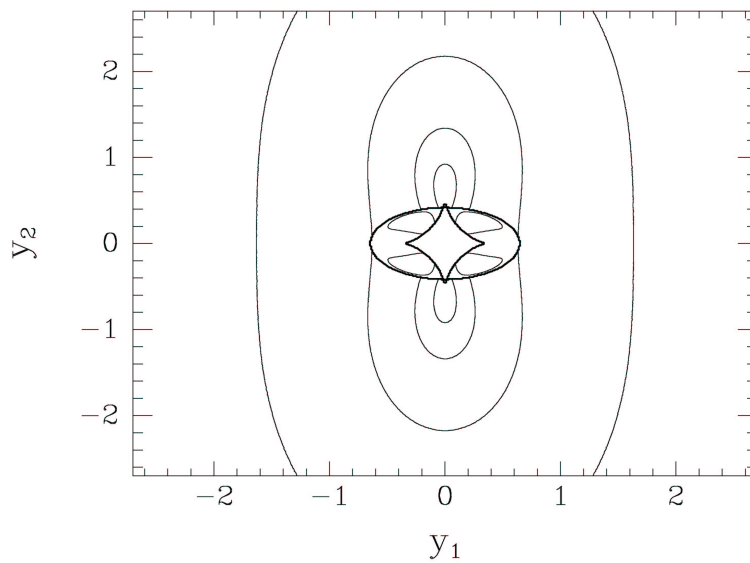


Abbildung 5.8: Linien gleicher Gesamtverstärkung der Quelle für $\mu_p = 1.5, 2, 3$ und 5 bei einer Elliptizität von $f = 0.6$ und einem Kernradius von $b_c = 0.1$. Die Kaustiken sind als dicke Linien eingetragen. Da wir den selben Ausschnitt der Linsenebene gewählt haben wie für Abb. 4.12, können wir die beiden Abbildungen direkt vergleichen.

der beiden Kaustiken der NIE-Linse fällt der Wirkungsquerschnitt für $\mu_p \geq 5$ wieder größer aus als für die SIE-Linse.

Außenlösung. Die divergierende Gesamtmasse der Linse können wir für den nichtsingulären Fall ebenso beseitigen wie bei der SIE-Linse, indem wir nämlich die Flächenmasendichte bei einer bestimmten Iso-Dichte-Linie abschneiden. Sie lautet dann:

$$\kappa(b) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b^2 + b_c^2}} & \text{für } b \leq b_0 \\ 0 & \text{für } b > b_0 \end{cases} .$$

Die Gesamtmasse der NIE-Linse ist dann

$$m(b_0) = \frac{1}{f} \int_0^{b_0} \frac{b' db'}{\sqrt{b'^2 + b_c^2}} = \frac{1}{f} [\sqrt{b_0^2 + b_c^2} - b_c] .$$

Der Ablenkwinkel vereinfacht sich also für die Außenlösung, wie wir auch hier die Lösung für $b > b_0$ nennen, zu

$$l(\mathbf{x}) = \frac{\operatorname{sgn} \mathbf{x}}{f'} \left[\operatorname{arsinh}(\Xi \sqrt{b_0^2 + b_c^2}) - \operatorname{arsinh}(\Xi b_c) \right] \quad ,$$

für die Scherung erhalten wir

$$\Gamma^*(\mathbf{x}) = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} = \frac{f}{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b_c^2} \left[b_c - \frac{f \sqrt{b_0^2 \mathbf{x}^2 + b_c^2 \mathbf{x}^2}}{\sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b_0^2}} \right] \quad .$$

Auch diese Größen führen im Grenzfall $b_c \rightarrow 0$ auf die entsprechenden der Außenlösung der SIE-Linse.

Kapitel 6

Eine Statistik isothermer Linsen

Dieses Kapitel beschäftigt sich in knapper Form mit einer Anwendung des singulären isothermen Ellipsoids (SIE-Linse). Wir werden uns der Frage zuwenden, wie häufig bestimmte Linsensituationen zu erwarten sind, wenn wir die Linsen als singuläres isothermes Ellipsoid modellieren. Dazu werden wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels eine Statistik für die Linsentheorie allgemein entwickeln und auf den Fall mit singulären isothermen Linsen spezialisieren. Dabei werden wir eine wesentliche Feststellung machen, nämlich daß sich das noch zu definierende mehrdimensionale statistische Integral für den Fall der SIE- M_q -Linse unter gewissen Voraussetzungen in ein Produkt von eindimensionalen Integralen zerlegen läßt. Diese Eigenschaft erleichtert den Umgang mit dem statistischen Integral wesentlich. Im folgenden Abschnitt werden wir einige markante statistische Ergebnisse für die SIE-Linse darstellen. Besonderes Augenmerk werden wir dabei darauf richten, wie sich die Ergebnisse im Vergleich zur SIS-Linse verändern, da dieses (besonders einfache) Linsenmodell häufig in statistischen Untersuchungen verwendet wird.

6.1 Linsenstatistik

Wir werden in einem ersten Abschnitt ein mehrdimensionales *statistisches Integral* entwickeln, dessen Wert die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß eine Quelle einem bestimmten Linseneffekt hervorruft. dieses Integral wird in der allgemeinen Form noch keine Annahmen über das Linsenmodell enthalten. Es läßt sich aber noch deutlich vereinfachen, wenn wir als Modell singuläre isotherme Linsen verwenden. Dies werden wir im darauffolgenden Abschnitt tun.

6.1.1 Das statistische Integral

Das kosmologische Modell. Uns interessiert besonders die Frage, wie häufig sehr weit von uns entfernte Lichtquellen, wie zum Beispiel QSOs, von uns beobachtet werden,

nachdem eine Gravitationslinse deren Lichtausbreitung beeinflusst hat. Deshalb werden wir alle Entfernungen auf die Rotverschiebung z beziehen, die das einzige der Beobachtung zugängliche Entfernungsmaß für derartige Abstände darstellt. Es ist sofort klar, daß dabei die Annahme eines kosmologischen Modells wesentlich ist. Das Modell, das wir hier verwenden wollen, haben wir im Abschnitt 3.3 beschrieben. Es enthält drei Parameter, nämlich die heutige Dichte der Materie ρ_0 , die Hubble-Konstante H_0 und die Glattheit $\tilde{\alpha}$, die in viele der nun zu entwickelnden Begriffe eingehen, ohne daß wir sie immer ausdrücklich erwähnen. Die Dyer-Roeder-Gleichung, die wir innerhalb des Modells „hergeleitet“ haben, liefert uns die Winkelentfernung D . Außerdem enthält das Modell die Annahme, daß wir uns in einem „Im Mittel“-Friedmann-Lemaître-Universum befinden. Sie wird uns später helfen, zu entscheiden, ob wir für eine selbstkonsistente Beschreibung innerhalb dieses Modells die eben genannte Winkelentfernung D , ihr dimensionsloses Pendant r , oder die entsprechenden Größen des Friedmann-Lemaître-Universums, die wir mit D_1 und r_1 ($\tilde{\alpha} = 1$) bezeichnen, verwenden müssen.

Wirkungsquerschnitt. Bevor wir das statistische Integral ableiten, wollen wir noch ein anschauliches Verständnis für den Begriff des *Wirkungsquerschnitts*, den wir bereits in den vorangegangenen Kapiteln benutzt haben, entwickeln. Nehmen wir zum Beispiel die Eigenschaft, daß die Quelle durch eine gegebene Linse mindestens um einen bestimmten Betrag verstärkt sein soll, so wird es Bereiche in der Quellenebene geben, in dem diese Eigenschaft erfüllt ist und solche, in denen die Gesamtverstärkung nicht ausreicht. Den Inhalt der Fläche, in der diese Eigenschaft erfüllt ist, wollen wir als Wirkungsquerschnitt für eine bestimmte Mindestverstärkung bezeichnen. In gleicher Weise können wir mit jeder anderen Eigenschaft Q der Linsenabbildung verfahren. Der Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}(Q, z, z_s, \chi)$ wird im allgemeinen von Q , den Rotverschiebungen z der Linse und z_s der Quelle und außerdem dem Linsenmodell, das wir uns durch dessen Parameter χ repräsentiert denken, abhängen. In unserem späteren Beispiel der singulären isothermen Linsenmodelle wird χ durch die Elliptizität f und die Geschwindigkeitsdispersion v gegeben sein.

Das statistische Integral. $n(z, \chi) d\chi$ bezeichne die Dichte der Linsen mit der Rotverschiebung z , die im Parameterbereich $d\chi$ um χ liegen. Nehmen wir an, daß sich die Linsenpopulation im Laufe der Zeit nicht entwickelt, d. h. die Dichte¹ der Linsen in den Koordinaten \mathbf{x} der Robertson-Walker-Metrik (3.1) konstant bleibt, so vereinfacht sich $n(z, \chi)$ zu $(1+z)^3 n(\chi)$, wobei $n(\chi)$ die heutige Dichte der Linsen, also die bei $z = 0$, mißt. Nehmen wir an, daß die gesamte zu Klumpen zusammengezogene Materie $(1 - \hat{\alpha})\Omega\rho_{cr}$

¹Diese auf den räumlichen Teil der Robertson-Walker-Metrik bezogenen Größen heißen häufig auch *mitbewegt*: Wir sprechen also dabei von der mitbewegten Dichte.

als Linsen betrachtet werden kann, so muß

$$\int M(\chi) n(\chi) d\chi = (1 - \hat{\alpha})\Omega\rho_{\text{cr}}$$

gelten, wobei $M(\chi)$ die Masse der Linsen mit den Parametern χ beschreibt. Diese Beziehung kann zur Normierung von $n(\chi)$ verwendet werden. In unserem speziellen Fall müssen wir aber anders vorgehen, da isotherme Linsen eine divergierende Gesamtmasse haben, sofern sie nicht abgeschnitten sind.

Denken wir uns eine „Kugelschale mit Radius z “ um uns als Beobachter mit der „Dicke dz “, so ist deren physikalisches Volumen durch die Fläche $\mathcal{A}(z) = 4\pi D_1^2(z)$ einer Sphäre mit Rotverschiebung z , multipliziert mit der physikalischen Dicke dD_{prop} , gegeben, also

$$dV = \mathcal{A}(z) \frac{dD_{\text{prop}}}{dz} dz \quad .$$

Die Anzahl der Linsen mit den Parametern im Intervall $d\chi$ um χ und einer Rotverschiebung zwischen z und $z + dz$ ist durch

$$dN = (1 + z)^3 n(\chi) d\chi dV$$

gegeben, so daß der Wirkungsquerschnitt aller Linsen in dieser Kugelschale, projiziert an die Quellsphäre z_s , gleich

$$d\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(Q, z, z_s, \chi) dN$$

ist. Setzen wir voraus, daß die Wirkungsquerschnitte aller Linsen mit einer Rotverschiebung kleiner als z_s nicht überlappen, dann ist der gesamte von den Linsen an der Quellsphäre verursachte Wirkungsquerschnitt durch

$$\hat{\sigma}_{\text{tot}}(Q, z_s) = \int_{(\chi)} \int_0^{z_s} d\hat{\sigma}$$

bestimmt. Dieser mögliche Überlapp ist dann vernachlässigbar, wenn $\hat{\sigma}_{\text{tot}}(Q, z_s) \ll \mathcal{A}(z_s)$ gilt. Da $P(Q, z_s) := \frac{\hat{\sigma}_{\text{tot}}(Q, z_s)}{\mathcal{A}(z_s)} \ll 1$ die Wahrscheinlichkeit² bezeichnet, mit der die Linsen ein Ereignis mit der Eigenschaft Q verursachen, ist das statistische Integral durch

$$P(Q, z_s) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{r_1^2(z_s)} \int_0^{z_s} dz r_1^2(z) \frac{1+z}{\sqrt{1+\Omega z}} \int d\chi \hat{\sigma}(Q, z, z_s, \chi) n(\chi) \quad (6.1)$$

gegeben. Darin errechnet sich der dimensionsbehaftete Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}$ aus dem entsprechenden dimensionslosen σ der Linsentheorie durch die Gleichung $\hat{\sigma} = \eta_0^2 \sigma$.

²Dies trifft nur dann zu, wenn es keine physikalische Korrelation zwischen den Quellen und den Linsen gibt.

Abschließen werden wir diesen Abschnitt mit einer Bemerkung zur Herleitung. Diese Art der Beschreibung ist, wie [Ehlers, Schneider 1986] zeigen, selbstkonsistent mit unserem kosmologischen Modell aus Abschnitt 3.3. Früher wurde diese Beziehung hergeleitet, indem eine vom Beobachter in dessen Vergangenheitslichtkegel ausgehende Nullgeodäte als Zufallsvariable verwendet wurde. Dies führt zur selben Beziehung für $P(Q, z_s)$, mit Ausnahme der Tatsache, daß die Winkelentfernungen r_1 durch die „Dyer-Roeder-Entfernungen“ r ersetzt sind. Da $\frac{r^2(z)}{r_1^2(z)}$ eine monoton steigende Funktion in z ist, unterschätzt die „alte“ Gleichung die Wahrscheinlichkeit für ein Linsenereignis. Die genannten Autoren geben den relativen Fehler für das statistische Integral im Fall $\Omega = 1$ und $\tilde{\alpha} = 0$ an, wobei sie als Linsenmodell Punktmassen benutzt haben. Es ergibt sich für $z_s = 2$ bereits ein Fehler von 50 Prozent. Die Wahl des Lichtstrahls als Zufallsvariable ist deshalb unzulässig, weil sich dieser zufällige Lichtstrahl nicht wie ein durchschnittlicher Strahl verhält. Er kann von Klumpen beeinflusst werden.

6.1.2 Das statistische Integral für SIE- M_q -Linsen

Jetzt wollen wir das statistische Integral mit der SIE- M_q -Linse als Modell anwenden. Als Parameter des Linsenmodells erkennen wir die Elliptizität f und die Geschwindigkeitsdispersion v , die anhand der Dopplerverbreiterungen von Spektrallinien direkt meßbar ist. Diese können wir mit Hilfe der Faber-Jackson-Relation in Beziehung zur Leuchtkraft L einer Galaxie setzen. [Faber Jackson 1976] finden die Beziehung³ $L \propto v^4$, wobei L die Leuchtkraft im blauen Spektralband bezeichnet. Für die Leuchtkraft $L_* \simeq 4.7 \cdot 10^{10} h_{50}^{-2} L_\odot$, dessen Bedeutung uns sogleich bei der Diskussion der Schechter-Verteilung klar werden wird, ergibt sich empirisch eine Geschwindigkeitsdispersion $v_* \simeq 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Zusammen erhalten wir für die *Faber-Jackson-Relation*

$$\frac{L}{L_*} = \frac{v^4}{v_*^4} \quad .$$

Für die Leuchtkraftverteilung $\Phi(L) dL$, die die Galaxiendichte im Leuchtkraftintervall $[L, L + dL[$ beschreibt, findet [Schechter 1976] aus Beobachtungen die Beziehung

$$\begin{aligned} \Phi(L) dL &= \Phi_* \left(\frac{L}{L_*} \right)^\nu e^{-L/L_*} dL \\ &= L_* \Phi(\ell) d\ell \quad , \end{aligned}$$

wenn wir $\ell := \frac{L}{L_*}$ definieren. L_* trennt also den Bereich geringer Leuchtkraft, in dem sich die Schechter-Verteilung etwa wie eine Potenzfunktion ℓ^ν verhält, von dem Bereich großer Leuchtkraft, in dem sie im wesentlichen exponentiell abfällt. Der auftretende Exponent

³Diese Beziehung ist leider aufgrund der geringen Anzahl der untersuchten Galaxien statistisch ziemlich schlecht gesichert.

wird von [Schechter 1976] mit $\nu \simeq -1.25$ angegeben. [Efstathiou et al. 1988] finden dafür den Wert $\nu = -1.07 \pm 0.05$. Außerdem geben diese Autoren die mittlere Leuchtkraftdichte \mathcal{L} aller Galaxien mit

$$\mathcal{L} \simeq 9.7 \cdot 10^7 h_{50} L_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}$$

an, der auch von ihnen selbst als unsicher bezeichnet wird. Allerdings ermöglicht uns das, die Normierung Φ_* der Schechter-Verteilung mit Hilfe der Gleichung

$$\mathcal{L} = L_*^2 \int_0^{\infty} \ell \Phi(\ell) d\ell = \Phi_* L_*^2 \Gamma(\nu + 2)$$

festzulegen. $\Gamma(\nu)$ bezeichnet darin die Gammafunktion. Nennen wir die Dichte der Galaxien in der Elliptizität $p(f)$, so erhalten wir für die Dichte der Linsen unter der Annahme, daß die Leuchtkraft ℓ und die Elliptizität f unabhängig sind, $n(\chi) = n(\ell, f) = \Phi(\ell)p(f)$.

Nun können wir im statistischen Integral die Integration über die Leuchtkraft ℓ ausführen, und wir erhalten als Ergebnis:

$$P(Q, z_s) = \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \frac{\Theta_*^2 \mathcal{L}}{L_*} \frac{1}{r_1^2(z_s)} \int_0^{z_s} r_1^2(z) r^2(z, z_s) \frac{1+z}{\sqrt{1+\Omega z}} \left[\int_0^1 f p(f) \sigma(Q, f) df \right] dz .$$

Dabei haben wir $\hat{\sigma}(Q, z; z_s, \ell, f) = \eta_0^2 \sigma(Q, f) = \Theta_*^2 D_{ds}^2 \ell f \sigma(Q, f)$ mit $\eta_0 = D_s \zeta_0 / D_d$ und $\Theta_* := 4\pi v_*^2 / c^2$ verwendet. Ist die Eigenschaft Q unabhängig von der Rotverschiebung z , so zerfällt auch das verbliebene zweidimensionale Integral über z und f in ein Produkt und wir erhalten

$$\begin{aligned} P(Q, z_s) &= \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \frac{\Theta_*^2 \mathcal{L}}{L_*} A(z_s) B(Q) \\ \text{mit } A(z_s) &:= \frac{1}{r_1^2(z_s)} \int_0^{z_s} r_1^2(z) r^2(z, z_s) \frac{1+z}{\sqrt{1+\Omega z}} dz \\ \text{und } B(Q) &:= \int_0^1 f p(f) \sigma(Q, f) df \quad . \end{aligned}$$

Setzen wir die Konstanten des Vorfaktors ein, so erhalten wir für ihn den Wert $2.0 \cdot 10^{-2}$. Die Tatsache, daß sich das statistische Integral in drei eindimensionale Integrale zerlegen läßt, ist eine spezielle Eigenschaft des SIE-Linsenmodells.

Im Rest dieses Abschnittes widmen wir uns dem Integral $A(z)$ über die Rotverschiebung. Für alle analytischen Lösungen der Dyer-Roeder-Gleichung, die im Abschnitt 4.5.3 von [Schneider et al. 1992] angegeben werden, läßt sich auch das Rotverschiebungintegral $A(z)$ analytisch lösen. In den meisten Fällen ist diese Lösung aber lang und unübersichtlich. Ausnahmen bilden die beiden Fälle $\Omega = 1$ und $\Omega = 2$ bei „glatter“ Materieverteilung

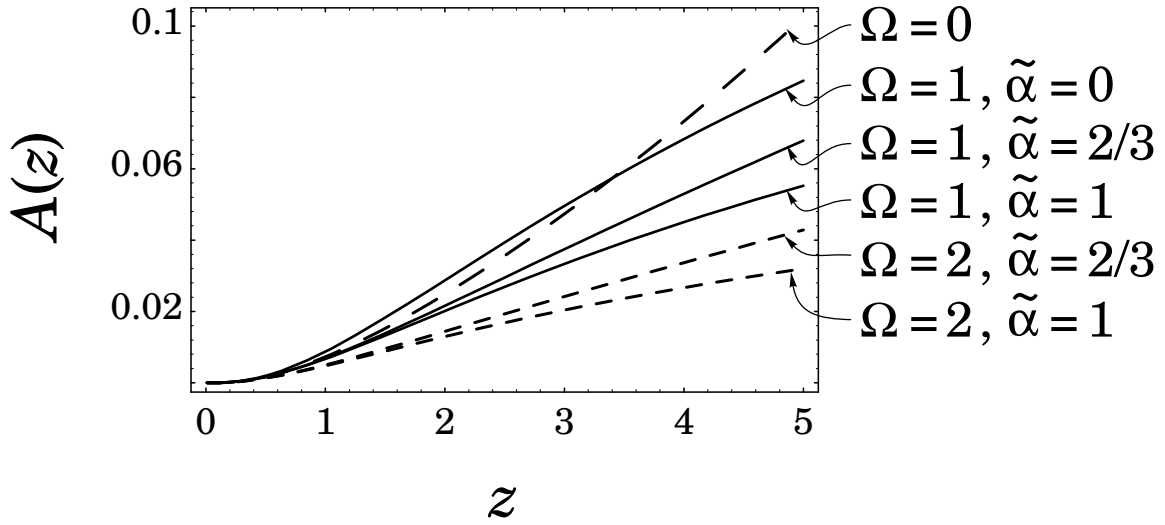


Abbildung 6.1: Das Integral $A(z)$ für etliche Werte der Parameter Ω und $\tilde{\alpha}$. Für alle eingezeichneten Kurven lassen sich analytische Darstellungen des Integrals $A(z)$ finden, jedoch nur die beiden im Text angegebenen Lösungen besitzen überschaubare Form.

($\tilde{\alpha} = 1$). Sie lauten nämlich

$$A(z) = \begin{cases} \frac{4}{15} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)^3 & \text{für } \Omega = 1 \text{ und } \tilde{\alpha} = 1 \\ \frac{2}{15} \frac{z(\sqrt{1+2z}-1)^2}{(1+z)(\sqrt{1+2z}+1)^2} & \text{für } \Omega = 2 \text{ und } \tilde{\alpha} = 1 \end{cases} .$$

Abb. 6.1 zeigt diese und eine Reihe weiterer Werte für die Parameter Ω und $\tilde{\alpha}$ in graphischer Form. Darin zeigt sich, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Linsenereignis $P(Q, z_s) \propto A(z_s)$ in denjenigen Universen mit geringerer Fokussierung (Ω geringer oder bei festgehaltenem Ω $\tilde{\alpha}$ geringer) erhöht ist.

6.2 Die Statistik der SIE-Linse

Hier wollen wir uns auf drei verschiedene Fragestellungen zu diesem Thema beschränken, die es alle drei ermöglichen, das statistische Integral in der angegebenen Form zu faktorisieren. Wir werden also im wesentlichen das Integral $B(Q)$ diskutieren. Als erstes wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wahrscheinlich eine Mehrfachabbildung der Lichtquelle ist und bei welchem Bruchteil davon mehr als zwei Bilder auftreten. Dann werden

wir die Häufigkeit sehr hoch verstärkter Quellen untersuchen. Schließlich werden wir die Wirkungsquerschnitte der SIE-Linse für eine bestimmte Mindestverstärkung in Relation zu dem der SIS-Linse setzen. Dies wird uns ermöglichen, die Frage zu beantworten, in wiefern die Elliptizität die Häufigkeit von Linsenabbildungen mit bestimmten Mindestverstärkungen beeinflusst. Diese Fragestellung ist in sofern besonders interessant, als die SIS-Linse Grundlage vieler statistischer Untersuchungen innerhalb der Linsentheorie ist.

Bevor wir aber damit beginnen können, müssen wir noch die Verteilung $p(f)$ der Galaxien in der Elliptizität festlegen. Wir wollen zwei verschiedene Funktionen, eine möglichst einfache, aber trotzdem plausible, und eine an Beobachtungen angelehnte Funktion verwenden. Als einfache Verteilung wählen wir

$$p_1(f) = \begin{cases} \frac{1}{1-f_0} & \text{für } f \in [f_0, 1] \\ 0 & \text{für } f < f_0 \end{cases}$$

und als die beobachtete Verteilung die von [Miralda-Escudé 1991] angegebene Näherungsfunktion

$$p_2(f) = p_0(1 + cf) e^{-\frac{f_0^2}{f^2}} \left(1 - e^{-\frac{1-f}{f_1}}\right) ,$$

wobei sich p_0 aus der Normierung ergibt. Tab. 6.1 gibt die Parameter der vier verwendeten Modelle an und Abb. 6.2 zeigt die Verteilungen der Modelle 3 und 4 graphisch.

Dabei sind die beiden ersten als möglichst einfache Annäherung an die beiden letzten gewählt. Sie erlauben teilweise die analytische Behandlung des Problems, und wir können daran im Vergleich mit den realistischen Modellen sehen, wie empfindlich die Ergebnisse auf Veränderungen in der Verteilung reagieren. Die Modelle 3 und 4 sind als die Annäherung zweier verschiedener Beobachtungen zu verstehen. Modell 3 liegt eine Auswertung der Elliptizitäten von Galaxien im UGC-Katalog zugrunde. Dieser Katalog scheinbar heller (und daher nahe benachbarter) Galaxien ist nahezu vollständig bis zur fünfzehnten Größenklasse, und Auswahleffekte sollten aufgrund der großen Helligkeit der Objekte keine Rolle spielen. Um dieses Ergebnis aber auf die Linsenstatistik anwenden zu können, benötigen wir die Annahme, daß die Elliptizitätsverteilung von der scheinbaren Helligkeit (und damit auch der Entfernung) unabhängig ist, was sich durch Beobachtungen nicht stützen läßt. Grundlage für Modell 4 bildet ein sogenanntes „deep CCD survey“ von Feldgalaxien im Helligkeitsbereich $22 < B_J < 24$. Man beschränkt sich dabei auf Feldgalaxien, um einer Störung der Elliptizitätsverteilung durch den Linseneffekt entgegenzuwirken. Sie besitzt den Vorteil, an tatsächlichen Linsenandidaten gemessen worden zu sein, ist aber Auswahleffekten physikalischer (wie zum Beispiel dem Linseneffekt, der natürlich auch bei Feldgalaxien nicht prinzipiell ausgeschlossen ist) oder beobachtungstechnischer Natur wesentlich stärker ausgeliefert.

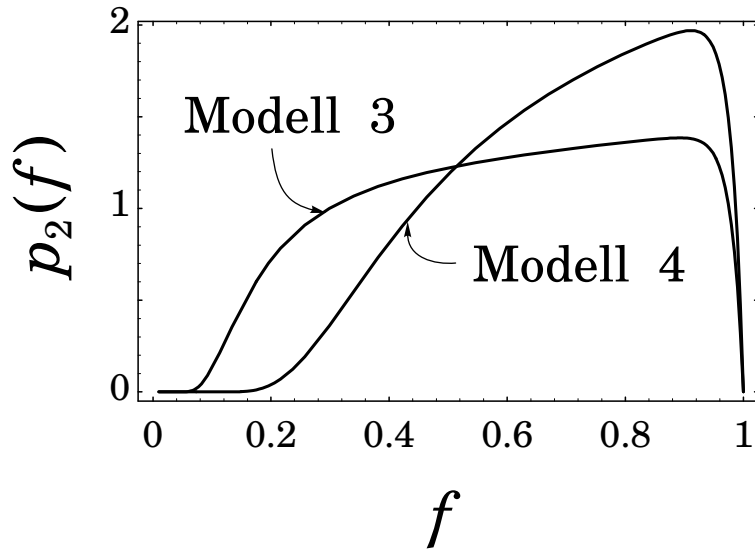
Mehrfachabbildungen. Setzen wir Gl. (4.7), den Wirkungsquerschnitt σ_g der Grenzlinie, in die Integration B_g über die Elliptizität f ein, so erhalten wir für unsere vier

Modell	Vert.	c	f_0	f_1
1	p_1	-	0.3	-
2	p_1	-	0.6	-
3	p_2	0.2	0.15	0.02
4	p_2	0.2	0.4	0.02

Tabelle 6.1: Die Parameterwerte der verwendeten Modelle für die Elliptizitätsverteilungen $p(f)$.

Modelle die in Tab. 6.2 aufgelisteten Ergebnisse. Sie sind im wesentlichen unabhängig von der Elliptizitätsverteilung—was uns nicht überrascht, da dies auch für $f\sigma_g$ gilt. Wie wir im vierten Kapitel festgestellt haben, entspricht dieser Wirkungsquerschnitt für $f \gtrsim 0.4$ dem für Mehrfachabbildungen. Da mit Ausnahme des zweiten Modells alle Verteilungen Galaxien mit stärkerer Elliptizität enthalten, müssen wir den Wirkungsquerschnitt für Mehrfachabbildungen im Vergleich zu dem der Grenzlinie (besonders der ungeradzahli- gen Modelle) leicht nach oben korrigieren, da Teile der Kaustik für $f \lesssim 0.4$ „außerhalb“ der Grenzlinie liegen. Dieser Effekt wird aber überkompensiert durch die Tatsache, daß für endliche Kernradien der Wirkungsquerschnitt der zweiten Kaustik (siehe NIE-Linse), dessen Grenzfall die Grenzlinie darstellt, wesentlich unterhalb von σ_g liegt. Dies zeigt Abb. 5.7 in voller Deutlichkeit. Der Interpretation dieses Querschnitts als dem für Mehrfachabbildungen haftet die eben genannte Einschränkung wesentlich deutlicher an.

Genauso wie mit der Grenzlinie können wir mit der Kaustik verfahren. Das Ergebnis B_k zeigt ebenfalls Tab. 6.2. Dabei zeigt sich, daß diese Werte im wesentlichen von den stark elliptischen Anteilen der Verteilungen geprägt werden, da die Zahlen für die ungeradzahli- gen Modelle, die stärker elliptische Linsen enthalten, ein Mehrfaches der geradzahli- gen ausmachen. Aus demselben Grund sind die Ergebnisse für die realistischeren Modelle größer als für die entsprechenden p_1 -Modelle. B_k können wir als Faktor für die Häufigkeit von Linsenereignissen mit mindestens drei Bildern interpretieren. Ihn als

Abbildung 6.2: $p_2(f)$ der Modelle 3 und 4 aus Tab. 6.1

Häufigkeit für vier Bilder zu sehen, wie wir das noch für σ_k getan haben, ist nicht möglich, da das Ergebnis wesentlich vom Anteil starker Elliptizitäten in $p(f)$ abhängt. Die vierte Spalte in Tab. 6.2 zeigt das Verhältnis zwischen B_k und B_g . Nehmen wir die realistischere NIE-Linse als Grundlage, so stellt das Verhältnis B_k/B_g eine untere Schranke an das entsprechende Verhältnis (von erster zu zweiter Kaustik) im nichtsingulären Fall dar. Der Grund dafür ist, daß der Wirkungsquerschnitt der zweiten Kaustik mit steigendem Kernradius rapide abnimmt (siehe dazu Abb. 5.7).

Nehmen wir ein flaches ($\Omega = 1$) und „glattes“ ($\hat{\alpha} = 1$) Universum an und denken uns die Lichtquelle bei $z_s = 2$, so erhalten wir $P(Q) \simeq 4 \cdot 10^{-4} B(Q)$. Für die Wahrscheinlichkeit von Mehrfachabbildungen P_g erhalten wir also ungefähr ein Promille. Für P_k ergibt sich mit deutlicher Streuung ein Wert von knapp 10^{-4} .

Hohe Gesamtverstärkung. Stellen wir uns die Frage, wie wahrscheinlich ein Linseneignis mit sehr hoher Verstärkung ist, so können wir ebenfalls das statistische Integral in der faktorisierten Form verwenden. Wir erhalten mit Gl. (4.6) für B :

$$B(\mu_p > \mu_{\min}) = \frac{4\pi}{\mu_{\min}^2} + \frac{B_0}{\mu_{\min}^{5/2}} \quad .$$

Es zeigt sich also, daß der führende Anteil von B unabhängig von der Verteilung $p(f)$ der Linsen in der Elliptizität ist. Im Grenzfall sehr hoher Verstärkung liefert also das

Modell	B_g	B_k	B_k/B_g	B_0
1	3.12	0.167	0.05	8.29
2	3.10	0.039	0.01	11.3
3	2.87	0.267	0.09	6.88
4	3.02	0.125	0.04	8.12

Tabelle 6.2: $B_{g,k}$ und B_0 für die verschiedenen Modelle $p(f)$.

SIE-Linsenmodell ein übereinstimmendes Ergebnis zur SIS-Linse. Die Konstante B_0 läßt sich für die einfache Elliptizitätsverteilung $p_1(f)$ analytisch bestimmen, wenn wir den von der Elliptizität abhängigen Faktor $16\sqrt{6}(1+1/f)/(15f')$ aus Gl. (4.6) in das Integral B einsetzen. Sie lautet

$$B_0 = \frac{16\sqrt{6}}{15(1-f_0)} \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-f_0^2} - \arcsin f_0 \right) .$$

Tab. 6.2 zeigt die Ergebnisse für die vier verwendeten Verteilungen $p(f)$. Der Wert von B_0 liegt in der Größenordnung von 4π , dem Koeffizienten des ersten Summanden von $B(\mu_p > \mu_{\min})$, so daß die Spitzen etwa den $\mu_{\min}^{1/2}$ -ten Teil zu B beitragen.

Geringe Gesamtverstärkung. Da der Wirkungsquerschnitt für geringe Verstärkung nur numerisch zugänglich ist, werden wir in diesem Abschnitt anders als bisher vorgehen. Wir werden den Wirkungsquerschnitt der SIE-Linse $\sigma(\mu_p > \mu_{\min})$ für eine bestimmte Mindestverstärkung in Relation zu dem der SIS-Linse setzen. Die SIS-Linse ist, wie wir das schon in der Einleitung zu diesem Abschnitt erwähnt haben, Grundlage vieler Arbeiten über die Linsenstatistik (z. B. [Turner et al. 1984]), was diese Fragestellung besonders interessant macht. Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir dann Rückschlüsse auf das Verhalten von $B(\mu_p > \mu_{\min})$ ziehen. Abb. 6.3 zeigt die Größe $f\sigma(\mu_p >$

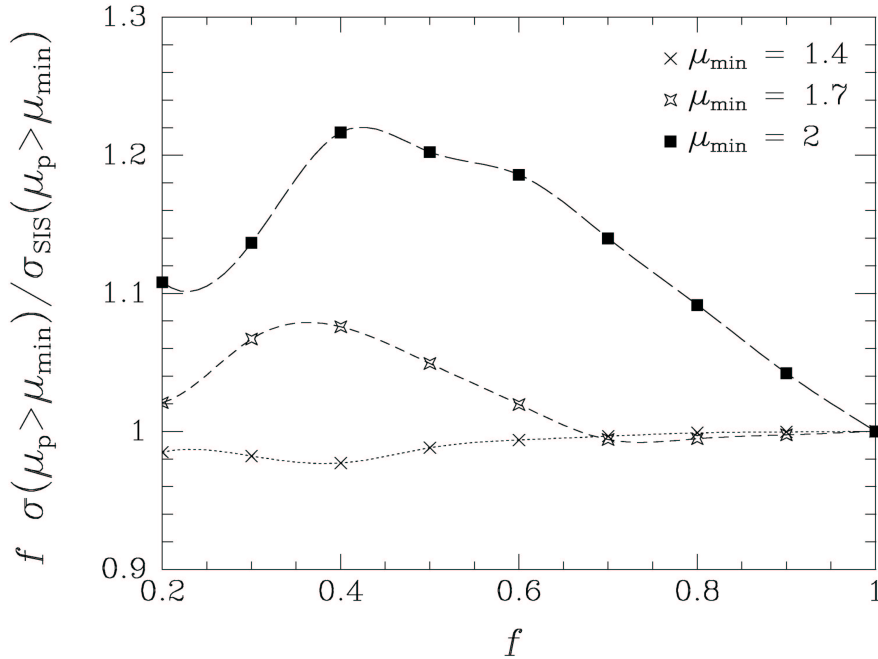


Abbildung 6.3: Der relative Wirkungsquerschnitt der SIE-Linse für eine Mindestverstärkung von 1.4, 1.7 und 2.

$\mu_{\min})/\sigma_{\text{SIS}}(\mu_{\text{p}} > \mu_{\min})$ in Abhängigkeit der Elliptizität für die Mindestverstärkungen $\mu_{\min} = 1.4$, $\mu_{\min} = 1.7$ und $\mu_{\min} = 2$. Dabei stellen die Punkte in dieser Abbildung die mit Hilfe des Gittersuchverfahrens—einem numerischen Verfahren, dessen Prinzip im Anhang D beschrieben ist—ermittelten Wirkungsquerschnitte dar. Qualitativ können wir das dort abgebildete Verhalten sehr wohl verstehen. Die Bedingung $\mu_{\text{p}} > \mu_{\min}$ wird für sehr kleines $1 < \mu_{\text{p}} \lesssim 1.4$ schon von nicht mehrfach abgebildeten Lichtquellen erreicht. Der entsprechende Wirkungsquerschnitt überdeckt die Kaustik sehr deutlich, so daß deren Verhalten unwesentlich wird. Bilder konstanter Verstärkung liegen aber, wie wir im vierten Kapitel festgestellt haben, auf Linien konstanter Flächenmassendichte, im Fall der SIE-Linse also auf Ellipsen. Diese Ellipse überträgt sich nahezu unverändert auf ein entsprechendes, einer Ellipse ähnliches Gebilde in die Quellenebene, da der Betrag des Ablenkungswinkels etwa gleich eins ist. Da wir aber Flächengrößen für die Statistik mit f skalieren, erhalten wir also das beinahe konstante Verhalten der relativen Wirkungsquerschnitte für geringe Verstärkung. Das gilt für größere Verstärkungen nicht mehr, da hier bereits der Einfluß der Spitzen auf der Kaustik der SIE-Linse merklich wird. Wir erhalten also einen im Vergleich zur SIS-Linse erhöhten Wirkungsquerschnitt. Die Senke in den

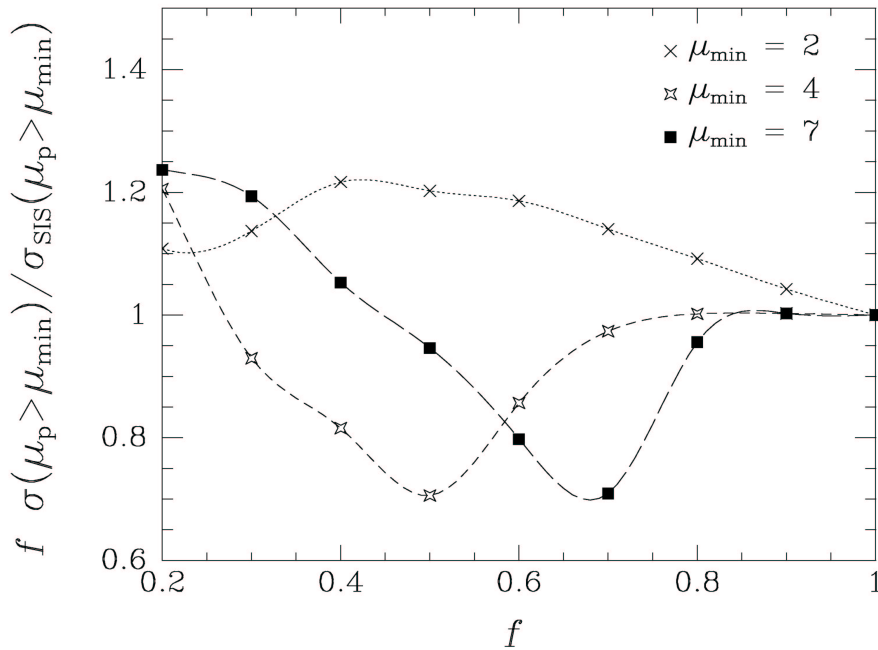
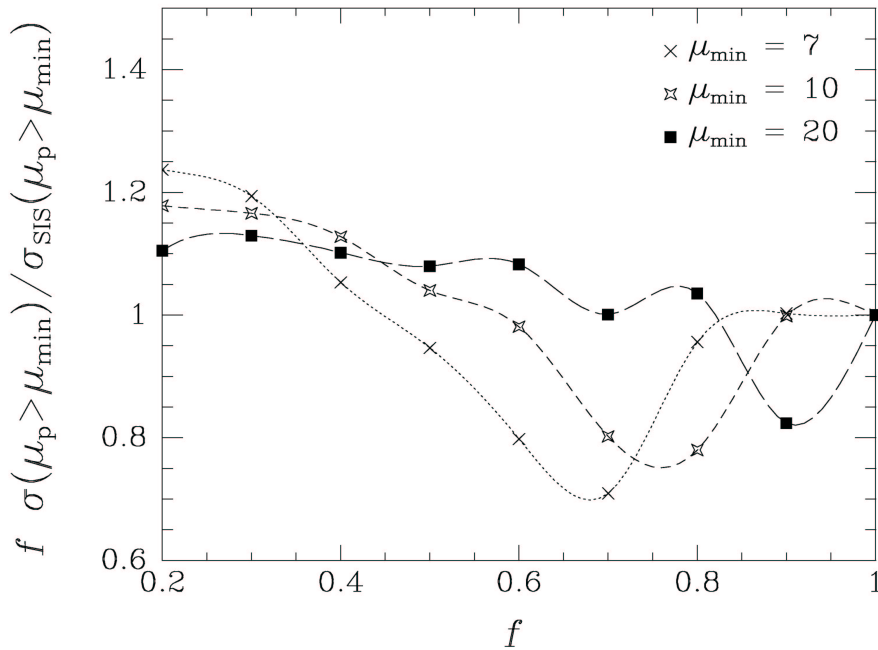


Abbildung 6.4: Relative Wirkungsquerschnitte für $2 \leq \mu_{\min} \leq 7$.

Graphen bei relativ starker Elliptizität trennt den Bereich von f , in dem alle vier Spitzen zur Erhöhung der Wirkungsquerschnitts beitragen, von dem Bereich starker Elliptizität, in dem der Wirkungsquerschnitt von den Spitzen auf der 2-Achse geprägt wird.

Die Überhöhung des relativen Wirkungsquerschnitts verschwindet für größere Verstärkungen $\mu_{\min} \geq 2$, da der Verlauf des Wirkungsquerschnitts σ_{SIS} der SIS-Linse bei $\mu_{\min} = 2$ aufgrund des auftretenden zweiten Bildes einen Knick aufweist. Dieses Verhalten können wir auch in Abb. 6.4 beobachten. Die übrigen qualitativen Merkmale der Kurven, die wir schon diskutiert haben, bleiben erhalten. Der Graph $\mu_{\min} = 7$ zeigt jedoch für starke Elliptizität eine Sättigung, deren Ursache darin zu suchen ist, daß der Einfluß der Spitzen verglichen mit dem der übrigen Kaustik bei größer werdender Verstärkung überproportional abnimmt. Dies können wir auch recht deutlich an der Näherungsformel des Wirkungsquerschnittes für sehr große Verstärkungen, die wir im vorangegangenen Paragraphen diskutiert haben, erkennen. Aufgrund des dort gefundenen Ergebnisses, daß dieser abgesehen vom Einfluß der Spitzen unabhängig von der Elliptizität ist, müssen wir für weiter wachsendes μ_{\min} eine neuerliche Annäherung der Kurven des relativen Wirkungsquerschnitts an die Eins erwarten. Dies ist im Rahmen numerischer Ungenauigkeiten auch gegeben, was Abb. 6.5 zeigt.

Abbildung 6.5: Relative Wirkungsquerschnitte für $7 \leq \mu_{\min} \leq 20$.

Wir stellen also für das Integral $B(\mu_p > \mu_{\min})$ fest, daß für $\mu_{\min} \lesssim 2$ unabhängig von der Verteilung der Linsen in der Elliptizität eine Zunahme gegenüber B_{SIS} zu erwarten ist, während B im mittleren Verstärkungsbereich aufgrund des Verlaufs der Kurven in Abb. 6.4 eher abnimmt. Wegen des recht geringfügigen Unterschieds zwischen den Wirkungsquerschnitten $f\sigma$ und σ_{SIS} können wir erwarten, daß B im allgemeinen weniger als 20 Prozent (der in weiten Teilen stärksten Abweichung des Wirkungsquerschnitts $f\sigma$ von σ_{SIS}) abweicht. Wir liegen damit also im Bereich der Fehler, die im Integral $A(z_s)$ aufgrund ungenau bekannter kosmologischer Parameter auftauchen. Die Überhöhung des relativen Wirkungsquerschnitts für $\mu_p < 2$ schwächt sich außerdem ab, wenn wir zu nichtsingulären Linsenmodellen übergehen würden. Dies zeigt ein vergleichender Blick zwischen den beiden Abben. 5.8 und 4.12.

Anhang A

Die Multipolentwicklung

Das Berechnen des Ablenkungswinkels zu einer exakt elliptischen Materieverteilung ist leider außerordentlich mühsam. Nehmen wir nämlich eine derartige Massenverteilung an, so hängt die Flächenmassendichte κ zwar nur mehr von $b = \sqrt{x_1^2 + f^2 x_2^2} ab^1$, worin $0 < f < 1$ wiederum das Verhältnis zwischen kleiner und großer Halbachse von Ellipsen konstanter Flächenmassendichte κ bezeichnet, aber die Lösung des θ -Integrals zum Ablenkungswinkel

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{f\pi} \int_0^b \kappa(b') b' \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'(b', \theta')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(b', \theta')|^2} d\theta' db'$$

ist ziemlich kompliziert. Wir können sie in [Schramm 1990] finden. Eine komplexe Beschreibung der Linsentheorie, wie wir sie im Anhang C durchführen werden, ergibt eine entsprechende Beziehung. Andererseits ist der völlige Verzicht auf Linsen mit elliptischer Symmetrie zu Gunsten solcher mit Rotationssymmetrie, die wesentlich leichter zu handhaben sind, auch nicht sinnvoll. Beobachtungen legen nämlich nahe, daß Linsen mit elliptischer Symmetrie die tatsächlichen Gegebenheiten besser beschreiben. Ein weiterer Gesichtspunkt ist, daß sich elliptische Linsen durch qualitativ andere Eigenschaften aus als rotationssymmetrische. Ein möglicher—und in der Physik häufig gegangener Kompromiß—ist daher die *Multipolentwicklung* der Materieverteilung mit dem Ziel, wenigstens zu einer annähernd elliptischen Flächenmassendichte einen analytischen Ausdruck für den Ablenkungswinkel zu finden. Genau diesen Weg wollen wir jetzt beschreiten. Eine sehr prägnante Darstellung dazu findet sich in [Schneider, Weiß 1991].

Aufgrund einer angenommenen Symmetrie der Linse bezüglich der beiden Achsen ist die Multipol- oder Fourierentwicklung der Materiedichte durch

$$2\kappa(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n(r) \cos(2n\phi) \tag{A.1}$$

¹Die verwendeten nichtorthogonalen elliptischen Koordinaten b und θ werden im Anhang C näher betrachtet.

vollständig gegeben. Die Fourierkoeffizienten κ_n erhalten wir durch folgende Integrationen:

$$\begin{aligned}\kappa_0(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(r, \phi) d\phi \\ \kappa_n(r) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(r, \phi) \cos(2n\phi) d\phi \quad \text{für } n \geq 1.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Leider kann auch die Lösung dieser Integrale schwierig sein, aber für einige interessante Fälle läßt sie sich zumindest bis zu einer befriedigenden Ordnung analytisch bewerkstelligen. Wenn wir das Ablenkpotehtial entsprechend entwickeln, nämlich

$$\psi(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(r) \cos(2n\phi) \quad ,$$

stellen wir fest, daß aufgrund der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen die Poisson-Gleichung (2.5) in gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - \frac{4n^2}{r^2} \psi_n = \kappa_n(r)\tag{A.3}$$

zerfällt. Unabhängige Lösungen der homogenen Form dieser Differentialgleichungen lauten $\psi_0 = 1$ und $\psi_0 = \ln r$. Für alle übrigen n sind sie durch $r^{\pm 2n}$ gegeben. Mit Hilfe des Greenschen Verfahrens können wir also die Lösung dieser Gleichung in Integralform angeben:

$$\begin{aligned}\psi_0(r) &= \ln r \int_0^r \kappa_0(r') r' dr' + \int_r^{\infty} \kappa_0(r') r' \ln r' dr' \\ \psi_n(r) &= -\frac{1}{4nr^{2n}} \int_0^r \kappa_n(r') r'^{(2n+1)} dr' - \\ &\quad - \frac{r^{2n}}{4n} \int_r^{\infty} \kappa_n(r') r'^{(1-2n)} dr' \quad \text{für } n \geq 1.\end{aligned}\tag{A.4}$$

Dabei haben wir die Randbedingungen so gewählt, daß für eine endliche Gesamtmasse der Linse das Ablenkpotehtial für große r nicht schneller als $\ln r$ ansteigt und es im Ursprung endlich bleibt. Durch Gradientenbildung $\alpha = \nabla\psi$ erhalten wir den Ablenkwinkel

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \psi'_0 \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi'_n \cos(2n\phi) \cos \phi + \frac{2n\psi_n}{r} \sin(2n\phi) \sin \phi \right] \\ \alpha_2 &= \psi'_0 \sin \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi'_n \cos(2n\phi) \sin \phi - \frac{2n\psi_n}{r} \sin(2n\phi) \cos \phi \right] \quad ,\end{aligned}\tag{A.5}$$

wobei der Strich die Ableitung nach r bezeichnet. Die Verstärkungsmatrix läßt sich ebenfalls allgemein angeben. Sie ist gleich

$$A = \mathbb{1} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \alpha_1 & \frac{\partial}{\partial \phi} \alpha_1 \\ \frac{\partial}{\partial r} \alpha_2 & \frac{\partial}{\partial \phi} \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi}{r} & \frac{\cos \phi}{r} \end{pmatrix} \quad ,\tag{A.6}$$

wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnet und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1}{\partial r} &= \psi_0'' \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n'' \cos(2n\phi) \cos \phi + 2n \frac{r\psi_n' - \psi_n}{r^2} \sin(2n\phi) \sin \phi \right] \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial r} &= \psi_0'' \sin \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n'' \cos(2n\phi) \sin \phi - 2n \frac{r\psi_n' - \psi_n}{r^2} \sin(2n\phi) \cos \phi \right] \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial \phi} &= -\psi_0' \sin \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\psi_n' (2n \sin(2n\phi) \cos \phi + \cos(2n\phi) \sin \phi) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2n\psi_n}{r} (2n \cos(2n\phi) \sin \phi + \sin(2n\phi) \cos \phi) \right] \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi} &= \psi_0' \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n' (\cos(2n\phi) \cos \phi - 2n \sin(2n\phi) \sin \phi) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2n\psi_n}{r} (2n \cos(2n\phi) \cos \phi - \sin(2n\phi) \sin \phi) \right]
\end{aligned}$$

gilt. Bei der Berechnung des Ablenkungswinkels und der Verstärkungsmatrix können wir uns die Arbeit in vielen Fällen dadurch erleichtern, daß wir die erste und die zweite Ableitung von $\psi_n(r)$ allgemein bestimmen. Dazu reicht aus, folgende Integrale zu lösen:

$$\begin{aligned}
p_n(r) &:= \frac{1}{2r^{2n}} \int_0^r \kappa_n(r') r'^{(2n+1)} dr' \\
P_n(r) &:= \frac{r^{2n}}{2} \int_r^\infty \frac{\kappa_n(r')}{r'^{(2n-1)}} dr'
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Durch Linearkombinationen von diesen Integralen und κ_n ergeben sich dann die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\psi_0' &= \frac{2}{r} p_0 \\
\psi_n' &= \frac{1}{r} (p_n - P_n) \quad \text{für } n \geq 1 \\
\psi_0'' &= \kappa_0 - \frac{2}{r^2} p_0 \\
\psi_n'' &= \kappa_n - \frac{2n+1}{r^2} p_n - \frac{2n-1}{r^2} P_n \quad \text{für } n \geq 1
\end{aligned}$$

Anhang B

Die Verstärkung der SIE-M_q-Linsen

In diesem Anhang zeigen wir, daß die Verstärkungsmatrix der SIE-M_q-Linsen

$$A^{(q)} = \begin{pmatrix} 1 - 2\kappa^{(q)} \sin^2 \phi & \kappa^{(q)} \sin(2\phi) \\ \kappa^{(q)} \sin(2\phi) & 1 - 2\kappa^{(q)} \cos^2 \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

lautet, wobei $\kappa^{(q)}$ die bis zur Ordnung q entwickelte Flächenmassendichte bezeichnet. Der Fall $q = \infty$, $\kappa^{(\infty)} = \kappa$, entspricht der SIE-Linse, also dem exakt elliptischen Modell. Zeigen können wir diese Eigenschaft durch vollständige Induktion. Für $q = 1$ läßt sie sich explizit aus der Linsengleichung (4.1) der SIE-M1-Linse errechnen. Berücksichtigen wir, daß für die SIE-M_q-Linsenmodelle die Beziehungen $\psi_n(r) = -k_n r / (4n^2 - 1)$, $\psi'_n = \frac{\psi_n}{r}$ und $\frac{\partial}{\partial r} \alpha_1^{(q)} = \frac{\partial}{\partial r} \alpha_2^{(q)} = 0$ gelten, so können wir aus Gl. (A.6)

$$\begin{aligned} A_{11}^{(q)} &= 1 + \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial \alpha_1^{(q)}}{\partial \phi} = \\ &= A_{11}^{(q-1)} + \frac{\sin \phi}{r} (4q^2 - 1) \psi'_q \cos(2q\phi) \sin \phi = \\ &= A_{11}^{(q-1)} - \frac{k_q}{2r} \cos(2q\phi) 2 \sin^2 \phi \end{aligned}$$

als 1-1-Komponente der Verstärkungsmatrix gewinnen. Von $A_{11}^{(q-1)}$, für die nach der Voraussetzung der Induktion die Behauptung gilt, subtrahiert sich also der mit dem Faktor $2 \sin^2 \phi$ multiplizierte q -te Summand der Multipolentwicklung der Flächenmassendichte. Damit ist die Behauptung für die 1-1-Komponente gezeigt. Für die übrigen Komponenten gehen wir analog vor, womit die Behauptung bewiesen ist.

Daraus können wir die Beziehungen für $\det A^{(q)}$ und $\text{tr} A^{(q)}$ errechnen:

$$\begin{aligned} \det A^{(q)} &= 1 - 2\kappa^{(q)} \\ \text{tr} A^{(q)} &= 2(1 - \kappa^{(q)}) = 1 + \det A^{(q)} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ebenso leicht erhalten wir für die Komponenten und den Betrag der Scherung die Werte:

$$\begin{aligned}\gamma_1^{(q)} &= -\kappa^{(q)} \cos(2\phi) \\ \gamma_2^{(q)} &= -\kappa^{(q)} \sin(2\phi) \\ \gamma^{(q)} &= \kappa^{(q)} \quad .\end{aligned}$$

Die Scherung wirkt also bemerkenswerterweise unabhängig von der Elliptizität f nur senkrecht zur radialen Richtung. Bilder werden in diese Richtung um den Faktor $|\mu| = |1 - 2\kappa^{(q)}|^{-1}$ gestreckt—dies ist freilich von der Elliptizität der Linse und der Ordnung q ihrer Entwicklung abhängig. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix sind durch

$$\begin{aligned}a_1^{(q)} &= 1 - 2\kappa^{(q)} \\ a_2^{(q)} &= 1\end{aligned}$$

gegeben. Aus der Beziehung für $\det A^{(q)}$ erkennen wir, daß Kurven gleicher Verstärkung einzelner Bilder durch die Iso-Dichte-Linien bestimmt werden. Für die kritische Kurve gilt $\kappa^{(q)} = \frac{1}{2}$. Da die Materiedichte radial nach außen monoton abnimmt, wird diese für die SIE-Mq-Linsenmodelle eine geschlossene Linie um den Ursprung sein. Sie wird die Bilder mit negativer Parität umschließen, während die mit positiver Händigkeit außerhalb dieser Linie liegen.

Wegen Gl. (B.1) lassen sich an die Verstärkungsmatrix geknüpfte Größen, die besonders in lokalen Entwicklungen der Linsengleichung eine Rolle spielen, in Abhängigkeit des Winkelanteils $\beta^{(q)}(\phi) := r \kappa^{(q)}$ ausdrücken. So gelten für den Gradienten von $D^{(q)} := \det A^{(q)}$ und dessen Betrag auf der kritischen Linie ($\kappa^{(q)} = \frac{1}{2}$) die Beziehungen

$$\begin{aligned}\nabla D^{(q)} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{(q)} &= \frac{1}{2\beta^{(q)2}} \left[(\beta^{(q)} \cos \phi + \beta^{(q)}_{,\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_1 + \right. \\ &\quad \left. + (\beta^{(q)} \sin \phi - \beta^{(q)}_{,\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_2 \right] \\ |\nabla D^{(q)}| = |\mathbf{T}^{(q)}| &= \frac{1}{2\beta^{(q)2}} \sqrt{\beta^{(q)2} + \beta^{(q)2}_{,\phi}} \quad ,\end{aligned}$$

wobei \mathbf{R} die Rotationmatrix und $\mathbf{T}^{(q)}$ den Tangentialvektor an die kritische Kurve bezeichnen—genau so, wie sie im Abschnitt 2.3 eingeführt wurden. Ähnlich wie im Abschnitt 2.2 bezeichnet $\beta^{(q)}_{,\phi}$ die Ableitung von $\beta^{(q)}$ bezüglich ϕ . Das Abbild des Vektors $\mathbf{T}^{(q)}$ in der Quellenebene, also der Tangentialvektor an die Kaustik, ist

$$\mathbf{A}^{(q)} \cdot \mathbf{T}^{(q)} = -\frac{\beta^{(q)}_{,\phi}}{2\beta^{(q)2}} (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) \quad ,$$

dessen Betrag ist

$$|\mathbf{A}^{(q)} \cdot \mathbf{T}^{(q)}| = \frac{|\beta^{(q)}_{,\phi}|}{2\beta^{(q)2}} \quad .$$

Längere, aber einfache Rechnungen ergeben auf den Spitzen für den Betrag der Richtungsableitung dieses Vektors

$$|(\mathbf{T}^{(q)} \cdot \nabla)(\mathbf{A}^{(q)} \cdot \mathbf{T}^{(q)})| = \frac{|\beta^{(q)}_{,\phi\phi}|}{8\beta^{(q)4}} \quad .$$

Dabei ist berücksichtigt, daß wir uns auf den Achsen befinden, d.h. $\beta^{(q)}_{,\phi} = 0$ ist. Mit diesen Ergebnissen können wir bereits den Wirkungsquerschnitt für hohe Verstärkungen, Gl. (2.16), in Abhängigkeit von $\beta^{(q)}$ angeben. Er lautet:

$$\sigma^{(q)}(\mu_p > \mu_{\min}) = \frac{32}{\mu_{\min}^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta^{(q)2} d\phi + \sum_i \frac{32\sqrt{6}\beta^{(q)2}|_i}{15\mu_{\min}^{5/2}} \sqrt{\frac{\beta^{(q)}|_i}{|\beta^{(q)}_{,\phi\phi}|_i}} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Summiert wird dabei über alle vorhandenen Spitzen. Die Näherungsformel für die Verstärkung, Gl (2.13), und die für den Laufzeitunterschied, Gl. (2.14), ergeben

$$|\mu| = \frac{4\beta^{(q)2}}{|\beta^{(q)}_{,\phi}|} \frac{1}{\delta x} \quad (\text{B.4})$$

$$c \delta t = (1 + z_d) \frac{D_s \zeta_0^2}{D_d D_{ds}} \frac{|\beta^{(q)}_{,\phi}|}{24\beta^{(q)2}} (\delta x)^3 \quad . \quad (\text{B.5})$$

Anhang C

Komplexe Darstellung der Linsentheorie

Die Linsentheorie läßt sich, wie im Anhang A erwähnt, auch in komplexer Form darstellen, die wir in diesem Anhang einführen wollen. Wir tun es im Hinblick auf die Tatsache, daß wir die Linsengleichung für elliptische Materieverteilungen besonders bequem in dieser Form schreiben können. Dies wurde zuerst von [Bourassa, Kantowski 1975] durchgeführt und später von [Bray 1984] verfeinert. Entsprechend wird sich der zweite Teil dieses Anhangs damit beschäftigen, deren Ergebnis für den Ablenkwinkel herzuleiten.

Fassen wir die Komponenten der skalierten Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} in der Linsen- bzw. Quellenebene zu den komplexen Zahlen

$$\mathbf{x} = x_1 + i x_2 = r \exp(i \phi); \quad \mathbf{y} = y_1 + i y_2$$

zusammen, so schreibt sich die Linsengleichung (2.3) als

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - l^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \quad . \quad (\text{C.1})$$

Die komplexe Form $l^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ des Ablenkwinkels finden wir analog zur reellen Darstellung durch eine Integration über die Linsenebene:

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\kappa(\mathbf{x}', \mathbf{x}'^*)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}'} d^2 x' \quad . \quad (\text{C.2})$$

Zerlegen wir diesen komplexen Ablenkwinkel in Real- und Imaginärteil, so erhalten wir wieder den gewohnten reellen Winkel

$$\boldsymbol{\alpha} = \Re(l) \mathbf{e}_1 - \Im(l) \mathbf{e}_2$$

zurück.

Um weitere Einzelheiten der Linsentheorie komplex zu formulieren, müssen wir zunächst einen kurzen Einschub über die verwendete komplexe Notation machen. Wir werden Differentiationen in der Form des Wirtinger-Kalküls darstellen. Dieses ist aufgrund der Analogie zur reellen Ableitung besonders intuitiv. Dabei sind die Operatoren

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^*} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)\end{aligned}$$

definiert, die es erlauben, die Regeln der partiellen Differentiation entsprechend für die Variablen \mathbf{x} und \mathbf{x}^* zu übernehmen. In der komplexen Analysis wird gezeigt, daß eine reell differenzierbare Funktion genau dann komplex differenzierbar ist, wenn die Ableitung dieser Funktion nach \mathbf{x}^* verschwindet. Eine stetig komplex differenzierbare Funktion ist außerdem analytisch. $a(\mathbf{x})$ soll ein (reelles) Skalarfeld in der Linsenebene benennen und $a(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ dessen komplexe Darstellung sein. Dann entspricht die Operation $2\partial a/\partial \mathbf{x}^*$ der Gradientenbildung in der reellen Analysis, ∇a . Bezeichnen wir mit $\mathbf{T} := T_1 + iT_2$ und $\mathbf{S} := S_1 + iS_2$ die komplexen Entsprechungen der Vektoren \mathbf{T} und \mathbf{S} , so liefert die komplexe Multiplikation $\mathbf{S}^*\mathbf{T}$ den Ausdruck¹ $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} + i\mathbf{S} \times \mathbf{T}$. Mit $\mathbf{S}^* = i$ können wir erkennen, daß der Rotation des Vektors \mathbf{T} um $\frac{\pi}{2}$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$ mit $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, die komplexe Multiplikation $i\mathbf{T}$ entspricht. Ersetzen wir \mathbf{T} durch den Vektor $2\partial a/\partial \mathbf{x}^*$, den Gradienten von a , so liefert die komplexe Größe $2\mathbf{S}^* \partial a/\partial \mathbf{x}^*$ die reellen Ausdrücke $\mathbf{S} \cdot \nabla a$ als Real- und $\mathbf{S} \times \nabla a$ als Imaginärteil. Der Laplace-Operation $\nabla^2 a$ entspricht der Ausdruck $4\partial a/(\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^*)$. Diese Definitionen reichen aus, um viele Ergebnisse der Linsentheorie komplex zu schreiben.

Setzen wir das Ablenkpotential wie im reellen Fall gleich

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} \kappa(\mathbf{x}', \mathbf{x}'^*) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d^2 x' \quad ,$$

so erhalten wir daraus den komplexen Ablenkwinkel $l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$, indem wir

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}$$

errechnen. Die Poisson-Gleichung der komplexen Darstellung lautet damit

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^*} = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}^*} = \kappa \quad .$$

l ist also genau dann analytisch, wenn κ verschwindet. Das Fermat-Potential ist dem reellen Fall entsprechend durch

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*; \mathbf{y}, \mathbf{y}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})^* - \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$$

¹ $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ ist als die reelle Zahl $S_1 T_2 - S_2 T_1$ definiert.

gegeben, womit wir wiederum die Linsengleichung als Gradientenabbildung

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^*} = 0$$

formulieren können. Definieren wir uns $\Gamma := \gamma_1 + i\gamma_2$, so ist die Scherung in der komplexen Darstellung durch

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial |}{\partial \mathbf{x}} \right)^*$$

gegeben. Bezeichnen wir $|\Gamma|$ mit γ , so können wir den Ausdruck der reellen Theorie für die Verstärkung $\mu = \frac{1}{D}$ mit $D := (1 - \kappa)^2 - \gamma^2$ übernehmen. Bei der lokalen Untersuchung der Linsenabbildung in reeller Darstellung benötigen wir häufig die Abbildung eines Vektors \mathbf{T} von der Linsen- in die Quellenebene mit Hilfe der Verstärkungsmatrix, $A \cdot \mathbf{T}$. In der komplexen Darstellung ist diese Abbildung durch $(1 - \kappa)\mathbf{T} - \Gamma^*\mathbf{T}^*$ gegeben. Weiterhin sind die auftretenden reellen Ableitungsoperatoren durch ihre komplexen Entsprechungen zu ersetzen.

Im nun folgenden zweiten Teil dieses Anhangs wollen wir die Herleitung des Ablenkungswinkels für den Fall elliptischer Massenverteilungen durchführen. Dazu führen wir nichtorthogonale elliptische Koordinaten b und θ ein, für die $x_1 =: b \cos \theta$ und $x_2 =: \frac{b}{f} \sin \theta$ gilt. Wegen der Gleichung $x_1^2 + f^2 x_2^2 = b^2$ ist b die kleine Halbachse der Ellipse mit fester elliptischer Koordinate b . Abb. C.1 zeigt diese Situation. Das Flächenelement d^2x ist in diesen elliptischen Koordinaten durch $d^2x = \left| \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(b, \theta)} \right| db d\theta = \frac{b}{f} db d\theta$ gegeben. Da wir uns auf Massenverteilungen mit elliptischer Symmetrie beschränken, haben wir $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \kappa(b)$. Gl. (C.2) lautet also nun

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty b' \kappa(b') \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{f\mathbf{x} - fb' \cos \theta' - i b' \sin \theta'} \right] db' .$$

Die Integration über θ' läßt sich ausführen, wenn wir die Variablentransformation $w := -\cot \frac{\theta'}{2}$ vornehmen. Mit den Beziehungen $d\theta' = (1 - \cos \theta') dw$, $\frac{\sin \theta'}{1 - \cos \theta'} = -w$, $\frac{1}{1 - \cos \theta'} = \frac{1}{2}(w^2 + 1)$ und $\frac{\cos \theta'}{1 - \cos \theta'} = \frac{1}{2}(w^2 - 1)$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{f\mathbf{x} - fb' \sin \theta' - i b' \cos \theta'} = \int_{-\infty}^\infty G(w) dw ,$$

wobei $G(w) := G_n/G_d$ mit $G_d(w) := \frac{f}{2}(\mathbf{x} - b')w^2 + i b'w + \frac{f}{2}(\mathbf{x} + b')$ ist. $G_n := 1$ ist in unserem Fall von w unabhängig. Setzen wir $w \in \mathbb{R}$ zu $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$ fort, indem wir zu w einen Imaginärteil hinzufügen, so können wir die Methoden der Funktionentheorie auf dieses Integral anwenden. Dazu brauchen wir zunächst die Residuen $\text{Res}_{\mathbf{w}_n} G$ der Funktion $G(\mathbf{w})$ an den (einfachen) Nullstellen \mathbf{w}_n

$$\mathbf{w}_{1,2} = \frac{-i b' \pm i \sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b'^2}}{f(\mathbf{x} - b')} ,$$

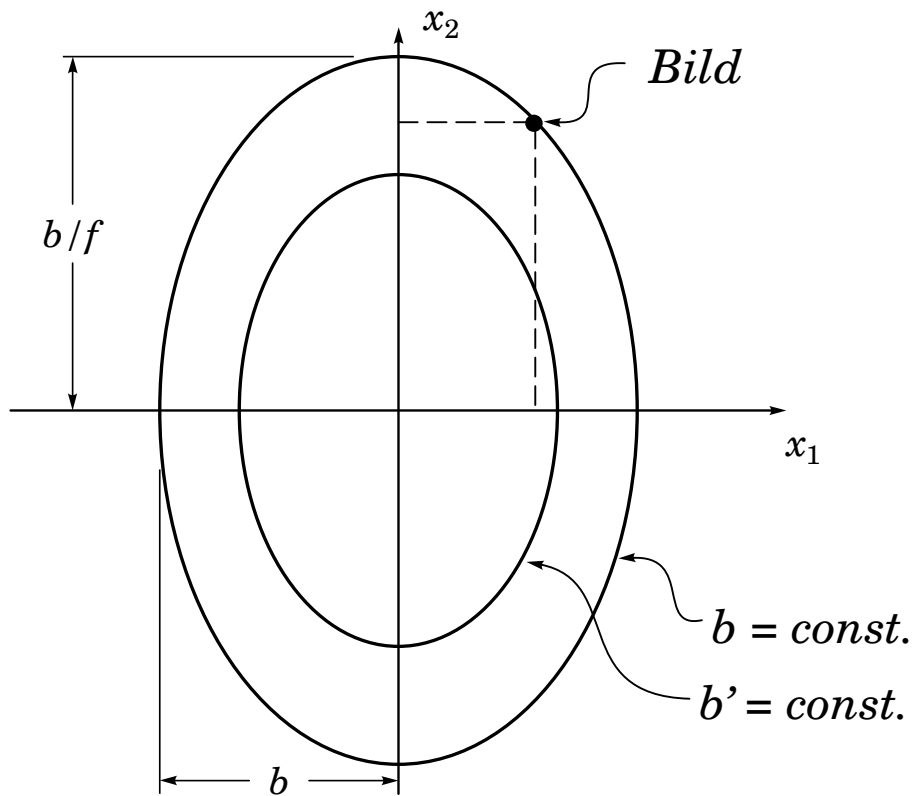


Abbildung C.1: Elliptische Linsenmodelle. Die Skizze zeigt zwei Ellipsen konstanter Flächenmassendichte mit den kleinen Halbachsen b und b' . Deren große Halbachsen sind entsprechend $\frac{b}{f}$ und $\frac{b'}{f}$. Die Ellipse b wird durch den Bildort \mathbf{x} festgelegt. Über alle Ellipsen mit kleinerer Halbachse b' müssen wir für die Berechnung des Ablenkungswinkels integrieren.

die durch

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{w}_{1,2}} \mathbf{G} = \frac{\mathbf{G}_n(\mathbf{w}_{1,2})}{\mathbf{G}'_d(\mathbf{w}_{1,2})} = \pm \frac{1}{i \sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b'^2}}$$

gegeben sind. Wegen der Beziehung²

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(w) dw = 2\pi i \sum_{\Im m \mathbf{w}_n > 0} \operatorname{Res}_{\mathbf{w}_n} \mathbf{G}$$

müssen wir drei verschiedene Lösungen unterscheiden:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b'^2}} & \quad \text{für } \Im m(\mathbf{w}_1) > 0 \text{ und } \Im m(\mathbf{w}_2) < 0 \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b'^2}} & \quad \text{für } \Im m(\mathbf{w}_1) < 0 \text{ und } \Im m(\mathbf{w}_2) > 0 \\ 0 & \quad \text{für } \Im m(\mathbf{w}_1) \Im m(\mathbf{w}_2) \geq 0 \end{aligned} .$$

Längere algebraische Rechnungen zeigen, daß $\Im m(\mathbf{w}_1) \Im m(\mathbf{w}_2) \geq 0$ genau dann gilt, wenn $b' \geq b$ ist. Das ist eine bemerkenswerte physikalische Eigenschaft: Der Ablenkwinkel wird nur durch diejenige Masse bestimmt, die sich innerhalb der durch die Bildposition \mathbf{x} bestimmten Ellipse befindet. Setzen wir nun alles in das Integral für den komplexen Ablenkwinkel ein, so erhalten wir schließlich

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = 2 \operatorname{sgn} \mathbf{x} \int_0^b \frac{b' \kappa(b')}{\sqrt{f^2 \mathbf{x}^2 + f'^2 b'^2}} db' \quad . \quad (\text{C.3})$$

$\operatorname{sgn} \mathbf{x}$ bezeichnet darin die Funktion

$$\operatorname{sgn} \mathbf{x} = \operatorname{sgn} (r \exp(i \phi)) := \frac{\sqrt{\mathbf{x}^2}}{\mathbf{x}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \phi \in [0, \pi[\\ -1 & \text{falls } \phi \in [\pi, 2\pi[\end{cases} .$$

Sie bestimmt das Vorzeichen des Imaginärteils von \mathbf{w}_1 . Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß das Residuum $\operatorname{Res}_{\mathbf{w}_n} \mathbf{G}$ für festes \mathbf{x} eine nicht verschwindende und stetige Funktion von b' ist. Dies wiederum bedeutet, daß wir das Vorzeichen von $\Im m(\mathbf{w}_1)$ durch die Gleichung

$$\frac{\Im m(\mathbf{w}_1)}{|\Im m(\mathbf{w}_1)|} = \lim_{b' \rightarrow 0} \frac{\Im m(\mathbf{w}_1)}{|\Im m(\mathbf{w}_1)|} = \frac{\sqrt{\mathbf{x}^2}}{\mathbf{x}}$$

bestimmen können. Die Lösung des Integrals (C.3) liefert uns nun für die SIE-Linse oder NIE-Linse den Ablenkwinkel in komplexer Darstellung.

²Der Beweis dieser Beziehung gelingt folgendermaßen: $\mathbf{G}(w)$ mit $w \in \mathbb{R}$ sei eine gebrochenrationale Funktion in w , bei der der Grad des Polynoms im Nenner den des Zählers um mindestens zwei übersteigt. Außerdem habe das Nenner-Polynom keine Nullstellen. Beide Voraussetzungen sind in unserem Fall erfüllt. Setzen wir jetzt $\mathbf{G}(w)$ durch Hinzufügen eines Imaginärteils zu w nach $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$ fort, so können wir den Residuensatz anwenden, wenn wir den Weg auf der reellen Achse „im Unendlichen der oberen Halbebene“ schließen. Dieser obere Teil des Weges trägt nicht zum Integral bei, da $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ für $|\mathbf{w}| \rightarrow \infty$ schneller als $|\mathbf{w}|^{-2}$ abfällt.

Anhang D

Das Gittersuchverfahren

Wir wollen hier kurz die Idee und die Technik des *Gittersuchverfahrens* beschreiben. Dies ist eine numerische Methode, gleichzeitig und mit relativ geringem Rechenaufwand die ungefähren Bildpositionen von Quellen eines großen Bereichs der Quellenebene zu bekommen. Daher ist es besonders dazu geeignet, die Abbildungseigenschaften einer Linsengleichung zu untersuchen, die sich nicht auflösen läßt oder für die sich die Kaustiken nicht explizit darstellen lassen. Wir haben sie im Kapitel 4 und 5 verwendet, um die Linien gleicher Gesamtverstärkung der SIE- und der NIE-Linse abzubilden, die analytisch unzugänglich sind. Außerdem kann es zur numerischen Bestätigung analytischer Berechnungen verwendet werden.

Das Prinzip dieses Verfahrens besteht darin, die Quellen- und die Linsenebene in ein Raster einzuteilen. Dann ordnen wir jeder Bildposition in diesem Raster eine Fläche so zu, daß alle diese Flächenstücke den relevanten Bereich der Linsenebene vollständig überdecken. Sie bilden wir jetzt auf die Quellenebene ab und überprüfen, welche Stellen unseres Quellrasters innerhalb dieser Flächen liegen. Damit können wir dann eine Tabelle aufstellen, die jeder Quellposition die ungefähren Bildpositionen zuordnet. Die Feinheit des Linsengitters bestimmt die Genauigkeit, mit der die Bildposition ermittelt wird. Sie ist durch die Rechenzeit begrenzt. Andererseits können wir durch ein Verfeinern des Quellrasters die Genauigkeit, mit der Wirkungsquerschnitte oder ähnliche Größen errechnet werden können, steigern. Dies ist aber in erster Linie durch die zur Verfügung stehende Speicherkapazität limitiert.

Für die bezüglich der Achsen symmetrischen Linsen, die wir untersuchen, genügt es, sich auf einen Quadranten der Quellenebene zu beschränken. Wir teilen diesen und die Linsenebene wie beschrieben in ein Raster ein. Dabei ist es empfehlenswert, sich mit den Gitterpositionen von den Symmetrieachsen fern zu halten, wie dies in Abb. D.1 dargestellt ist, da numerische Ungenauigkeiten auf solchen Achsen zu Schwierigkeiten führen können. Diese Abbildung zeigt auch die beiden Dreiecke pro Bildposition, die wir auf die Quellenebene abbilden wollen. Dreiecke sind Rechtecken vorzuziehen, weil sie nach

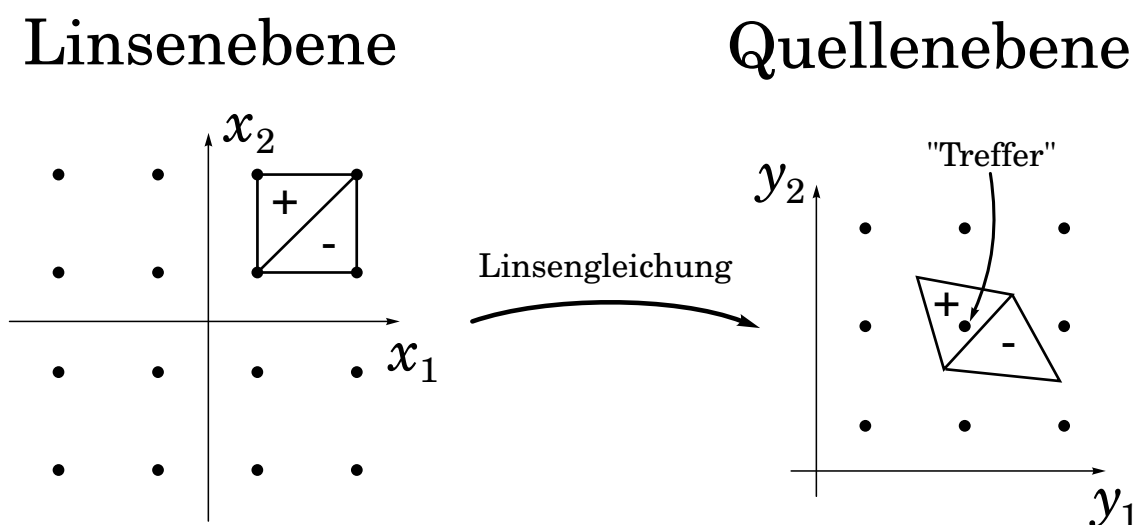


Abbildung D.1: Rastereinteilungen der Linsen- und der Quellenebene für das Gittersuchverfahren, angewandt auf bezüglich den Koordinatenachsen symmetrische Linsen. Die Skizze zeigt ebenfalls zwei Dreiecke, die von der Linsenebene in die Quellenebene abgebildet wurden. Innerhalb des Dreiecks + befindet sich eine Quellposition, so daß wir dieser zum Beispiel die untere Ecke des entsprechenden Dreiecks in der Linsenebene als Bildposition zuordnen können.

der Abbildung weiterhin eine konvexe Struktur haben müssen, was für Rechtecke nicht gewährleistet ist. Dies erleichtert das Auffinden von „ Treffern“. Dabei verfahren wir wie das in Abb. D.2 skizziert ist. Wir finden die Differenzvektoren $\mathbf{d}_{1,2,3}$ von den Dreiecksecken zu einer Gitterposition und bilden die drei Vektorprodukte $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3$ und $\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1$, wobei $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := a_1 b_2 - b_1 a_2$ ist. Besitzen sie alle drei das gleiche Vorzeichen, so befindet sich der Punkt aus dem Quellraster innerhalb des Dreiecks. $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1)$ bestimmt die Fläche des Dreiecks einschließlich der Orientierung. Es kann dazu verwendet werden, die Verstärkung und die Parität des Bildes zu finden.

Wie jedes numerische Verfahren besitzt auch dieses Schwächen, von denen die folgenden bekannt sind. So ist es möglich, daß wir (hoch verstärkte) Bilder verpassen, wenn das Dreieck die kritische Linie so überlappt, daß zwei oder mehr (nahe beieinanderliegende) Bilder einer Quellposition in dieses Dreieck fallen. Weiterhin verursachen Bereiche in der Linsenebene mit sehr schwachen Bildern sehr große Dreiecke in der Quellenebene, die viele Quellpunkte überlappen können. Dies führt zu einer Art „Verschmutzung“ der Bildtabelle mit scheinbaren Bildern, die aber alle sehr schwach sind. Eine weitere

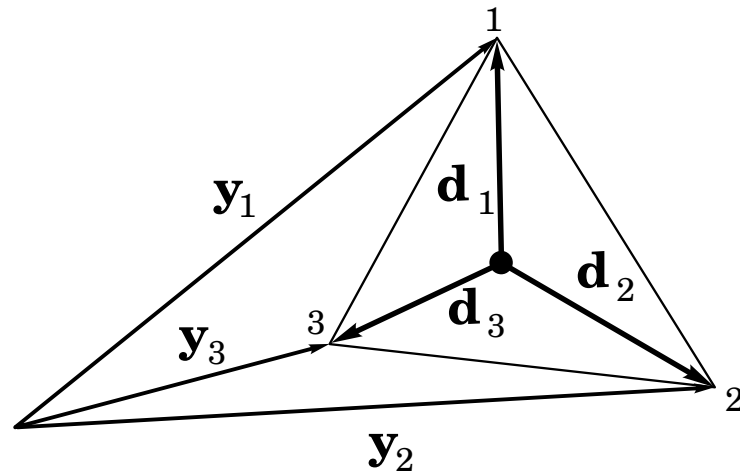


Abbildung D.2: Die Suche nach „Treffern“ und die Ermittlung der Verstärkung beim Gittersuchverfahren.

Schwierigkeit ergibt sich in den Bereichen mit sehr großer Scherung. So ist die lokale Erhaltung der Parität für infinitesimal kleine Flächenelemente zwar eine Eigenschaft der Linsengleichung, diese braucht aber für die „endlich“ kleinen Dreiecke des Gittersuchverfahrens nicht zu gelten. Es können sich bei großer Scherung Dreiecke mit „falscher“ Parität ausbilden, so daß es Gebiete in der Quellenebene gibt, in denen ein Dreieck mit falscher Parität und zwei angrenzenden Dreiecke mit richtiger Parität übereinander zu liegen kommen. Damit werden einer Quellposition innerhalb dieses Gebiets zwei zusätzliche „Geisterbilder“ zugeordnet. Das letzte Problem besitzt aber im Vergleich zu den beiden erstgenannten nur untergeordnete Bedeutung.

Verfeinern könnten wir unser Verfahren durch eine Methode, die „Transport von Bildern“ heißt. So können wir die exakte Quellposition ermitteln und sie dann an die mit dem Gittersuchverfahren ermittelte Gitterposition, die davon geringfügig abweichen wird, „verschieben“. Dabei können wir mit Hilfe der Inversen A^{-1} der Jacobimatrix das Bild entsprechend bewegen. Genauer wird dieses Verfahren in [Schneider et al. 1992, Kap. 10.5] beschrieben.

Literaturverzeichnis

- [Binney, Tremaine 1987] J. Binney, S. Tremaine: Galactic Dynamics; Princeton Series in Astrophysics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987
- [Börner 1988] G. Börner: The Early Universe—Facts and Fiction; Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1988
- [Bourassa, Kantowski 1975] R. R. Bourassa, R. Kantowski: The Theory of Transparent Gravitational Lenses; *Astrophys. J.* **195**, 13, 1975
- [Bray 1984] I. Bray: Spheroidal Gravitational Lenses; *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **208**, 511, 1984
- [Efstathiou et al. 1988] G. Efstathiou, R. S. Ellis, B. A. Peterson: Analysis of a Complete Galaxy Redshift Survey—II. The Field Galaxy Luminosity Function
- [Ehlers, Schneider 1986] J. Ehlers, P. Schneider: Self-consistent Probabilities for Gravitational Lensing in Inhomogeneous Universes; *Astron. Astrophys.* **168**, 57, 1986
- [Faber Jackson 1976] S. Faber, R. Jackson: Velocity Dispersion and Mass-to-Light-Ratios for Elliptical Galaxies; *Astrophys. J.* **204**, 668, 1976
- [Kantowski 1968] R. Kantowski: Corrections in the Luminosity-Redshift Relations of the Homogeneous Friedmann Models; *Astrophys. J.* **155**, 89, 1968
- [Kolb, Turner 1990] E. W. Kolb, M. G. Turner: The Early Universe; Addison-Wesley Publ. Comp., Redwood, 1990
- [Miralda-Escudé 1991] J. Miralda-Escudé: Gravitational Lensing by Clusters of Galaxies: Constraining the Mass Distribution; *Astrophys. J.* **370**, 1, 1991
- [Misner et al. 1973] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: Gravitation; Freeman, San Francisco 1973
- [Poston, Steward 1978] T. Poston, I. Steward: Catastrophe Theory and its Applications; Pitman, London, 1978

- [Schechter 1976] P. Schechter: An Analytic Expression for the Luminosity Function and Space Distribution of Galaxies; *Astrophys. J.* **203**, 297, 1976
- [Schneider et al. 1992] P. Schneider, J. Ehlers, E. E. Falco: *Gravitational Lensing; Astronomy and Astrophysics Series*, Springer-Verlag
- [Schneider, Weiß 1991] P. Schneider, A. Weiß: A Practical Approach to (Nearly) Elliptical Gravitational Lens Models; *Astron. Astrophys.* **247**, 269, 1991
- [Schneider, Weiß 1992] P. Schneider, A. Weiß: The Gravitational Lens Equation Near Cusps; *Astron. Astrophys.* **260**, 1, 1992
- [Schramm 1990] T. Schramm: Realistic Elliptical Potential Wells for Gravitational Lens Models; *Astron. Astrophys.* **231**, 19, 1990
- [Smoot et al. 1991] G. S. Smoot et al.: Preliminary Results from the COBE Differential Microwave Radiometers: Large Angular Scale Isotropy of the Cosmic Microwave Background, *Astrophys. J.* **371**, L1, 1991
- [Turner et al. 1984] E. L. Turner, J. P. Ostriker, J. R. Gott III: The Statistics of Gravitational Lenses: The Distributions of Image Angular Separations and Lens Redshifts; *Astrophys. J.* **284**, 1, 1984
- [Wald 1984] R. M. Wald: *General Relativity*; The University of Chicago Press, Chicago, 1984
- [Weinberg 1972] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology—Principles and Applications of the General Theory of Relativity*; John Wiley & Sons, New York, 1972

Bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. Jürgen Ehlers für die Betreuung dieser Arbeit.

Dr. habil. Peter Schneider, der die „Linsengruppe“ des Max-Planck-Institutes für Astrophysik leitet, übernahm diese Aufgabe „im Alltag“ einer solchen Arbeit. Er war jederzeit zu konstruktiver Kritik bereit und ihm ist es zu verdanken, daß ich meiner Neigung zu „analytischem Rechnen“ nachgehen konnte, obwohl sich dadurch diese Arbeit immer weiter von seiner ursprünglichen Idee wegentwickelte. In Matthias Bartelmann habe ich einen geduldigen Diskussionspartner für Probleme vielfältiger Art gefunden. Er half mir häufig über die Tücken des „Kollegen Computer“ und er hat neben Peter Schneider mehrere vorläufige Versionen dieser Arbeit gründlich gelesen.

Zu guter Letzt möchte bei meinen Zimmerkollegen, den Mitarbeitern des Instituts und besonders der „Linsengruppe“ bedanken. Sie sorgten für das angenehme Umfeld am Max-Planck-Institut für Astrophysik.

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit nur mit den angegebenen Hilfsmitteln und ohne fremde Hilfe angefertigt habe.

Robert Kormann